TRƯỜNG THCS – THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: **Toán** – Lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P=\left(1-\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right):\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$ với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9.$

b) Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau thoả mãn $a^3+1=3a, b^2+1=3b, c^3+1=3c.$ Tính giá trị của biểu thức $Q=a^2+b^2+c^2.$

Câu 2. *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $15\left(x^3+x^2+2x\right)=4\sqrt{5}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}.$

Câu 3. *(6,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A=a^2+4a+2021$ là một số chính phương.

b) Các cặp số nguyên (x,y) thoả mãn $2^x x^2=9y^2-12y+19$. Chứng minh rằng x là số chẵn và tìm tất cả các cặp (x,y).

c) Cho x,y là hai số nguyên dương thoả mãn x^2+y^2+58 chia hết cho xy. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2+y^2+58}{xy}$ chia hết cho 12.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn $(I;r)$ có bán kính IE, IF vuông góc với nhau.Kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E và F, cắt nhau tại A. Trên tia đối của tia EA lấy điểm B sao cho $EB>r$, qua B kẻ tiếp tuyến thứ hai của đường tròn $(I), D$ là tiếp điểm, BD cắt AF tại C. Gọi K là giao điểm của AI và FD.

a) Chứng minh rằng hai tam giác IAB và FAK đồng dạng.

b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt FD tại P. Gọi M là trung điểm AB, MI cắt AC tại Q. Chứng minh rằng tam giác APQ là tam giác cân.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+y^3$ với $x\ne 0, y\ne 0$,

$$\frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}.$$

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Cho đa giác đều có 2023 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P=\left(1-\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right):\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 4, x\neq 9$.

b) Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau thoả mãn $a^3+1=3a, b^2+1=3b, c^3+1=3c$. Tính giá trị của biểu thức $Q=a^2+b^2+c^2$.

Hướng dẫn:

a) Rút gọn được $P=\frac{3}{\sqrt{x-2}}\left(x\geq 0, x\neq 4, x\neq 9\right)$.

b) Ta suy ra a,b,c là 3 nghiệm của phương trình $x^3-3x+1=0$.

Theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=-\frac{0}{1}=0 \\ ab+bc+ca=\frac{-3}{1}=-3 \\ abc=\frac{1}{1}=1 \end{cases}$$

$Q=a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)=0-2\left(-3\right)=6.$

Câu 2. *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $15\left(x^3+x^2+2x\right)=4\sqrt{5}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$.

Hướng dẫn:

Có: VP $>0; x^2+x+2>0 \Rightarrow x>0$

Với $x>0$, chia cả 2 vế cho x^2 ta được:

$$15\left(x+1+\frac{2}{x}\right)=4\sqrt{5}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$

Đặt $x+\frac{2}{x}=a$ ta được:

$$15(a+1)=4\sqrt{5}a\sqrt{a^2-4}$$
$$\Leftrightarrow 16a^4-109a^2-90a-45=0$$
$$\Leftrightarrow (a-3)(16a^3+48a^2+35a+15)=0$$

$\Leftrightarrow a=3$ (Vì $a>0$)

$$\Rightarrow x+\frac{2}{x}=3$$
$$\Rightarrow x^2-3x+2=0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy $x=1$ hoặc $x=2$.

Câu 3. *(6,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A=a^2+4a+2021$ là một số chính phương.

b) Các cặp số nguyên (x,y) thoả mãn $2^x x^2=9y^2-12y+19$. Chứng minh rằng x là số chẵn và tìm tất cả các cặp (x,y).

c) Cho x,y là hai số nguyên dương thoả mãn x^2+y^2+58 chia hết cho xy. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2+y^2+58}{xy}$ chia hết cho 12.

Hướng dẫn:

a) Đặt $a^2+4a+2021=b^2$ $(b\in\mathbb{N})$

$$\Rightarrow (a+2)^2+2017=b^2$$
$$\Rightarrow (b-a-2)(b+a+2)=2017$$

Để ý rằng 2017 là số nguyên tố, ta tìm được $a=1006$ hoặc $a=-1010$.

b) Dễ dàng có $x>0$.

$2^x.x^2=9y^2-12y+19 \Rightarrow 2^x.x^2=(3y-2)^2+15 \Rightarrow 2^x.x^2$ chia 3 dư 1.

Vì số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1 $\Rightarrow x^2$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow 2^x$ chia 3 dư 1.

Nếu x lẻ thì $2^x\equiv -1 \pmod 3$ không thoả mãn $\Rightarrow x$ là số chẵn.

Đặt $x=2k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ $\Rightarrow 2^{2k}.x^2=(3y-2)^2+15 \Rightarrow (2^k.x-3y+2)(2^k.x+3y-2)=15$

Ta tìm được $x=2, y=1$.

c) Đặt $k=\dfrac{x^2+y^2+58}{xy}, k\in \mathbb{N}^* \Rightarrow kxy=x^2+y^2+58.$ Ta chứng minh $k\vdots 12 \Leftrightarrow \begin{cases} k\vdots 3 \\ k\vdots 4 \end{cases}.$

- Nếu trong hai số x,y có một số chia hết cho 3.
  Do vai trò của x,y là bình đẳng, giả sử $x\vdots 3 \Rightarrow xy\vdots 3$
  Ta có $x^2+y^2+58\vdots xy \Rightarrow x^2+y^2+58\vdots 3 \Rightarrow y^2+1\vdots 3 \Rightarrow y^2\equiv 2\pmod 3$
  Vô lí vì y^2 là số chính phương.
  Vì vậy cả x,y đều không chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố
  $\Rightarrow (xy,3)=1$ và $x^2\equiv 1\pmod 3; y^2\equiv 1\pmod 3 \Rightarrow x^2+y^2+58\equiv 1+1+1\equiv 0\pmod 3$
  $\Rightarrow x^2+y^2+58\vdots 3 \Rightarrow kxy=x^2+y^2+58$ mà $(xy,3)=1 \Rightarrow k\vdots 3.(1)$
- Nếu trong hai số x,y có một số chia hết cho 2.
  Do vai trò của x,y là bình đẳng, giả sử $x\vdots 2 \Rightarrow xy\vdots 2.$
  Ta có $x^2+y^2+58\vdots xy \Rightarrow x^2+y^2+58\vdots 2$ mà $x\vdots 2, 58\vdots 2 \Rightarrow y^2\vdots 2 \Rightarrow y\vdots 2 \Rightarrow xy\vdots 4$
  $\Rightarrow x^2+y^2+58\vdots 4$ vô lí vì $x\vdots 4, y\vdots 4$ do $x\vdots 2, y\vdots 2$ mà $58\not\vdots\, 4.$
  Vì vậy cả x,y đều không chia hết cho 2.
  $\Rightarrow x,y$ đều lẻ $\Rightarrow x-1, x+1, y-1, y+1$ đều chia hết cho 2.
  $\Rightarrow x^2-1=(x-1)(x+1)$ và $y^2-1=(y-1)(y+1)$ đều chia hết cho 4.
  $\Rightarrow x^2+y^2+58=x^2-1+y^2-1+60\vdots 4 \Rightarrow kxy=x^2+y^2+58\vdots 4$
  Mà $(xy,4)=1$ do x,y lẻ $\Rightarrow k\vdots 4.(2)$

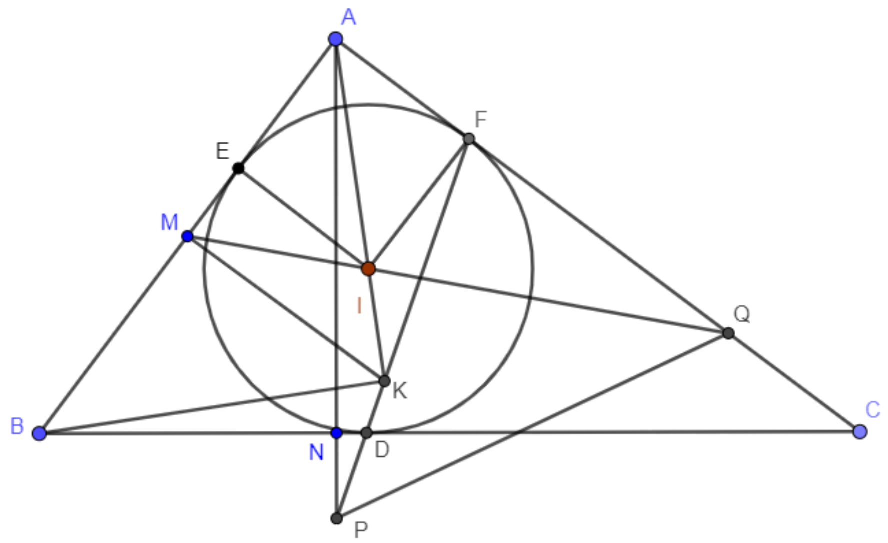
Từ $(1),(2)$ kết hợp với $(3,4)=1 \Rightarrow k\vdots 12.$

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn $(I;r)$ có bán kính IE, IF vuông góc với nhau.Kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E và F, cắt nhau tại A. Trên tia đối của tia EA lấy điểm B sao cho $EB>r$, qua B kẻ tiếp tuyến thứ hai của đường tròn $(I), D$ là tiếp điểm, BD cắt AF tại C. Gọi K là giao điểm của AI và FD.

a) Chứng minh rằng hai tam giác IAB và FAK đồng dạng.
b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt FD tại P. Gọi M là trung điểm AB, MI cắt AC tại Q. Chứng minh rằng tam giác APQ là tam giác cân.

Hướng dẫn:



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $CD = CF \Rightarrow \Delta CDF$ cân tại C.

$$\Rightarrow \angle CFD = \frac{180^0 - \angle C}{2} \Rightarrow \angle AFK = 180^0 - \angle CFK = 180^0 - \frac{180^0 - \angle C}{2} = \frac{180^0 + \angle C}{2}.(1)$$

Tứ giác $AEIF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow$ Hình chữ nhật $AEIF$ có $IE = IF$ nên là hình vuông. Suy ra $\angle IAB = \angle FAK = 45^0$.

$$\Rightarrow \angle AIB = 180^0 - (\angle IAB + \angle ABI) = 180^0 - \left(45^0 + \frac{\angle ABC}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \angle AIB = 180^0 - \left(45^0 + \frac{90^0 - \angle C}{2}\right) = \frac{180^0 + \angle C}{2}.(2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra: $\angle ABI = \angle AFK$ kết hợp với $\angle IAB = \angle AFK \Rightarrow \Delta IAB \sim \Delta FAK\,(g.g)$

b) Vì $\Delta IAB \sim \Delta FAK$ nên $\frac{IA}{AB} = \frac{FA}{AK} \Rightarrow \frac{IA}{AB} = \frac{EA}{AK}\,(FA = EA)$. Đẳng thức này kết hợp với điều kiện $\angle IAE$ chung, suy ra $\Delta AKB \sim \Delta AEI\,(c.g.c)$

ΔAEI vuông cân tại E nên ΔAKB vuông tại K. Suy ra đường trung tuyến KM cũng là đường cao nên $KM \perp AB$.

Ta có: $KM \perp AB, IE \perp AB, AC \perp AB \Rightarrow KM \,//\, IE \,//\, AC$.

$\Rightarrow ID \perp BC, AP \perp BC \Rightarrow ID \,//\, AP$.

Áp dụng định lí Talet và hệ quả Talet, kết hợp $ID = IE$.

$$\Rightarrow \frac{ID}{AP} = \frac{KI}{KA} = \frac{ME}{MA} = \frac{IE}{AQ} \Rightarrow AP = AQ \Rightarrow \Delta APQ \text{ cân tại } A.$$

Câu 5. *(2,0 điểm)* Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3$ với $x \neq 0, y \neq 0,$

$$\frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}.$$

Hướng dẫn:

$$\frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow x+y=(x+y)^2-3xy \geq (x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow x+y \geq \frac{(x+y)^2}{4} \geq 0$$

Nếu $x+y=0$ thì $P \geq 0.$

Nếu $x+y>0$ ta suy ra $x+y \leq 4.$

Có:

$$P=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$P=(x+y)^3-\left[(x+y)^2-(x+y)\right](x+y)$$
$$P=(x+y)^2 \leq 16.$$

Vậy GTLN của P là 16, dấu "=" xảy ra khi $x=y=2.$

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Cho đa giác đều có 2023 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

Hướng dẫn:

Vì số đỉnh của đa giác là lẻ (2023) nên tồn tại hai đỉnh kề nhau là A và B được tô cùng một màu, giả sử là màu đỏ. Vì số đỉnh là lẻ nên sẽ tồn tại 1 đỉnh nằm trên trung trực của AB, giả sử là C.

Nếu C được tô màu đỏ thì ΔABC là tam giác cân có 3 đỉnh cùng màu.

Nếu C được tô xanh, ta xét 2 đỉnh M, N lần lượt kề với A và B $(M \neq B, N \neq A)$. Nếu M, N đều màu xanh thì ΔCMN cân có 3 đỉnh cùng màu. Nếu có 1 trong 2 đỉnh M, N màu đỏ, giả sử là M thì khi đó ΔABN cân có 3 đỉnh cùng màu.