PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

QUẬN ĐỐNG ĐA

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN

NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn thi: **Toán**

Ngày thi: 15/10/2022

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. *(5,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\frac{x^2-8\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}+\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}$ (với $x\ge 0$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P biết $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho các số thực a,b,c thoả mãn $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

b) Tìm n là số tự nhiên sao cho 2^n-1 chia hết cho 7.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2+y^2=2(xy+4)$.

Bài 4. *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết $BC=8cm, BH=2cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, AH.

b) Trên cạnh AC lấy điểm K tuỳ ý $(K\ne A, K\ne C)$, gọi D là hình chiếu của A trên BK.

Chứng minh rằng: $S_{BHD}=\frac{1}{4}S_{BKC}\cos^2\angle ABD$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

$$(\sin\angle ACB+\cos\angle ACB)^2=1+\sin\angle AMB.$$

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Trên bảng viết 100 phân số $\frac{1}{100};\frac{2}{100};\frac{3}{100};...;\frac{100}{100}$. Ta thực hiện trò chơi như sau: tại mỗi bước, xoá đi hai số a,b $(a\ge b)$ bất kì trên bảng, nhưng lại viết thêm số $(a-b+ab)$. Sau một số lần thực hiện quy tắc trên thì trên bảng còn lại đúng một số, chứng minh rằng đó là số tự nhiên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

(Onthi123)

Bài 1. *(5,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\dfrac{x^2-8\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}+\dfrac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}$ (với $x\ge 0$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P biết $x=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$.

Hướng dẫn:

a)

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-8\right)}{x+2\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+8\right)}{x-2\sqrt{x}+4}$$
$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{x+2\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-2\sqrt{x}+4\right)}{x-2\sqrt{x}+4}$$
$$P=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)$$
$$P=2x.$$

b)

$$x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}...+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{25}-\sqrt{24}\right)=4.$$

Khi đó $P=2.4=8.$

Bài 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho các số thực a,b,c thoả mãn $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

b) Tìm n là số tự nhiên sao cho 2^n-1 chia hết cho 7.

Hướng dẫn:

a)

- Tìm GTNN:

Có $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

- Tìm GTLN:

Từ $0 \le a,b,c \le 2$ ta suy ra:

$$(a-2)(b-2)(c-2) \le 0$$
$$\Rightarrow abc - 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) - 8 \le 0$$
$$\Rightarrow abc - 2(ab+bc+ca) + 4 \le 0$$
$$\Rightarrow -2(ab+bc+ca) \le -4 - abc \le -4.$$

$$P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9 - 2(ab+bc+ca). \le 9 - 4 = 5.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $(a;b;c) = (2;1;0)$.

b)

- Nếu $n = 3k\ (k \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow \ 2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 \vdots 7$
- Nếu $n = 3k + 1\ (k \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow \ 2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2.8^k - 1 = 2(8^k - 1) + 1$
  Vì $8^k - 1 \vdots 7 \Rightarrow 2(8^k - 1) + 1 \not\vdots 7$.
- Nếu $n = 3k + 2\ (k \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow \ 2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4.8^k - 1 = 4(8^k - 1) + 3$
  Vì $8^k - 1 \vdots 7 \Rightarrow 4(8^k - 1) + 3 \not\vdots 7$.

Vậy $n = 3k\ (k \in \mathbb{N})$ thì $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0$.
b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 + y^2 = 2(xy + 4)$.

Hướng dẫn:

a) Điều kiện xác định: $x \ge -4$.

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{x+8} + 2 = \sqrt{5x+20}$$
$$\Leftrightarrow x + 12 + 4\sqrt{x+8} = 5x + 20$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+8} = x + 2$$
$$\Rightarrow x + 8 = x^2 + 4x + 4$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right..$$

Thử lại, ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Ta có:

$$3x^2 + y^2 = 2(xy + 4)$$
$$\Rightarrow 2x^2 + (x-y)^2 = 8$$

$\Rightarrow 2x^2 \le 8$

$\Rightarrow -2 \le x \le 2$

Vì x là số nguyên nên $x \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Ta tìm được các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(-2;-2);(2;2)$.

Bài 4. *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

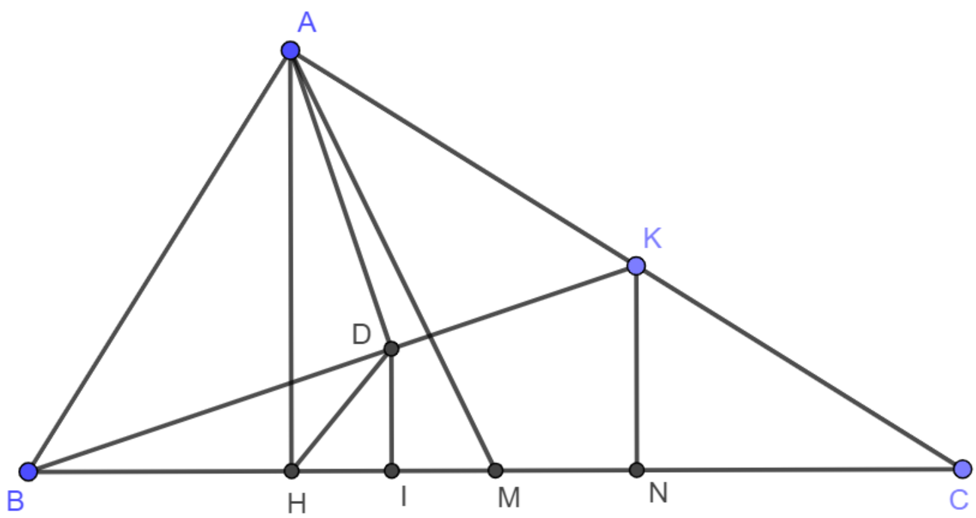
a) Biết $BC = 8cm, BH = 2cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, AH.

b) Trên cạnh AC lấy điểm K tuỳ ý $(K \ne A, K \ne C)$, gọi D là hình chiếu của A trên BK.

Chứng minh rằng: $S_{BHD} = \frac{1}{4} S_{BKC} \cos^2 \angle ABD.$

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

$$(\sin \angle ACB + \cos \angle ACB)^2 = 1 + \sin \angle AMB.$$



Hướng dẫn:

a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta dễ dàng tính được:

$AB = 4\,cm, AC = 4\sqrt{3}\,cm, AH = 2\sqrt{3}\,cm.$

b) Kẻ $DI \perp BC, KN \perp BC\,(I, N \in BC)$

Suy ra $\frac{DI}{KN} = \frac{BD}{BK}(Thales)$

$$\frac{S_{BHD}}{S_{BKC}} = \frac{DI.BH}{KN.BC} = \frac{BD.BH}{BK.BC} = \frac{BD}{BK}.\frac{BH}{BC} = \frac{BD.BK}{BK^2}.\frac{1}{4} = \frac{BA^2}{BK^2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cos^2 \angle ABD.$$

$\Rightarrow S_{BHD} = \frac{1}{4} S_{BKC}.\cos^2 \angle ABD.$

c) Ta có $\left(\sin\angle ACB+\cos\angle ACB\right)^2=\left(\frac{AB}{BC}+\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}+2\frac{AB}{BC}.\frac{AC}{BC}=1+2\frac{AB}{BC}.\frac{AC}{BC}.$

$\sin\angle AMB=\frac{AH}{AM}=\frac{2AH}{BC}.$

$\frac{AB}{BC}.\frac{AC}{BC}=\frac{AB.AC}{BC^2}=\frac{AH.BC}{BC^2}=\frac{AH}{BC}$

$\Rightarrow \sin\angle AMB=2\frac{AB}{BC}.\frac{AC}{BC}$

Suy ra $\left(\sin\angle ACB+\cos\angle ACB\right)^2=1+\sin\angle AMB.$

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Trên bảng viết 100 phân số $\frac{1}{100};\frac{2}{100};\frac{3}{100};...;\frac{100}{100}$. Ta thực hiện trò chơi như sau: tại mỗi bước, xoá đi hai số $a,b\ (a\ge b)$ bất kì trên bảng, nhưng lại viết thêm số $\left(a-b+ab\right)$. Sau một số lần thực hiện quy tắc trên thì trên bảng còn lại đúng một số, chứng minh rằng đó là số tự nhiên.

Hướng dẫn:

Vì trên bảng có số $\frac{100}{100}=1$, nên khi ta xóa số $\frac{100}{100}$ và một số b nào đó thì ta sẽ điền thêm số:

$\frac{100}{100}-b+\frac{100}{100}.b=\frac{100}{100}=1$ lên bảng. Ngoài ra, chú ý rằng $a-b+ab=(a-1)(b+1)+1\le 1$ với mọi số $0<a;\ b\le 1$ nên số $\frac{100}{100}$ luôn có giá trị lớn nhất trong các số có trên bảng.

Như vậy, số $\frac{100}{100}$ sẽ luôn còn lại trên bảng, nên khi ta thực hiện quy tắc trên tới khi trên bảng còn đúng một số, thì số đó phải là số 1, tức số còn lại trên bảng là số tự nhiên.