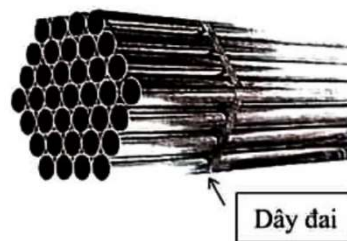


TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ TRONG CÁC KỲ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2023 - 2024

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)

Một nhà máy sản xuất ống thép khi xuất xưởng các ống thép được bó lại tạo thành khối gồm 37 ống như hình vẽ. Biết các ống có dạng hình trụ đường kính đáy bằng nhau và bằng 10cm. Tính độ dài của một sợi dây đai để buộc các ống thép lại với nhau.



Câu 2. (Trường chuyên toán tỉnh Gia Lai năm 2023-2024)

Bạn Tuấn lập kế hoạch tiết kiệm tiền để mua một cái laptop phục vụ cho việc học tập như sau: Hằng tháng, Tuấn tiết kiệm các khoản chi tiêu cá nhân để dành ra một triệu đồng. Vào ngày 01 hằng tháng Tuấn gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình một triệu đồng và bắt đầu gửi vào ngày 01 tháng 7 năm 2023 để hưởng lãi suất 0,5%/tháng theo hình thức lãi kép (nghĩa là tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn để tính lãi cho tháng sau) và duy trì việc này liên tục trong 3 năm. (Biết tài khoản ban đầu của Tuấn là 0 đồng và hàng tháng Tuấn không rút vốn, lãi).

a) Tính số tiền tiết kiệm Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/8/2023.

b) Tính đến ngày 02/10/2023 thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n \geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/7/2026.

Câu 3. (Trường chuyên Đồng Tháp năm 2023-2024)

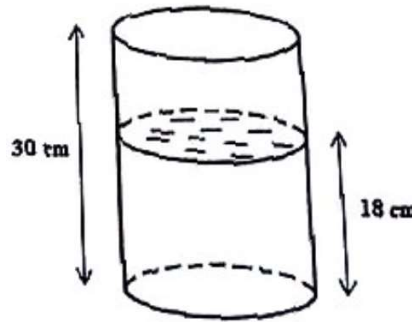
Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Câu 4. (Trường chuyên tin SGD Hà Nội năm 2023-2024)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi 1 trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, 1 bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ 1 túi bất kì hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. 2 bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023-2024)

Có một bình thủy tinh hình trụ cao 30cm chứa nước, diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh, mặt nước cách đáy bình là 18cm (hình vẽ bên). Cần đổ thêm bao nhiêu lít nước nữa để nước vừa đầy bình (Bỏ qua bề dày của bình, cho $\pi = 3,14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) ?

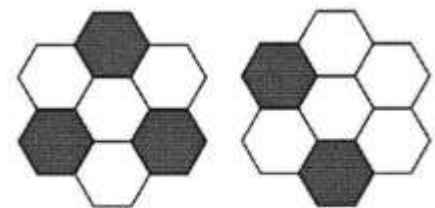


Câu 5. (Trường chuyên Long An năm 2023-2024)

Nhân dịp kỉ niệm 10 năm thành lập, cửa hàng GNH có thực hiện chương trình giảm giá cho mặt hàng X là 20% và mặt hàng Y là 15% so với giá niêm yết. Bà Giới mua 2 món hàng X và 1 món hàng Y phải trả số tiền là 395000 đồng. Ngày cuối cùng của chương trình, cửa hàng thay đổi bằng cách giảm giá mặt hàng X là 30% và mặt hàng Y là 25%. Vào ngày hôm đó, cô Định mua 3 món hàng X và 2 món hàng Y thì trả số tiền là 603000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng X và Y (giá niêm yết là giá ghi trên món hàng nhưng chưa thực hiện giảm giá).

Câu 6. (Trường chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2023-2024)

Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen và đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được ô màu như ở Hình 2.



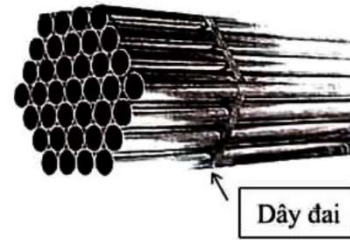
Hình 1

Hình 2

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)

Một nhà máy sản xuất ống thép khi xuất xưởng các ống thép được bó lại tạo thành khối gồm 37 ống như hình vẽ. Biết các ống có dạng hình trụ đường kính đáy bằng nhau và bằng 10cm. Tính độ dài của một sợi dây đai để buộc các ống thép lại với nhau.



Lời giải

Đặt d, r (cm) lần lượt là đường kính và bán kính của các ống thép

$$\Rightarrow d = 10\text{cm}; r = \frac{d}{2} = 5\text{cm}.$$

Ký hiệu các điểm như hình minh họa bên.

Trong đó:

A, B, M, N, H là các tiếp điểm giữa dây đai với các ống thép.

D, C, E, F, O là tâm của một số ống thép.

Giả sử các ống thép tiếp xúc khít nhau và dây đai buộc chính xác.

Dễ thấy ABCD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AB = CD = 3d = 3 \cdot 10 = 30(\text{cm}) \quad (1)$$

Nên hiển nhiên các điểm A, D, H, E thẳng hàng.

Xét $\triangle DEF$ có:

$$DE = 2DH = 2\sqrt{OD^2 - OH^2} = 2\sqrt{(2r)^2 - r^2} = 2r\sqrt{3} = 10\sqrt{3}(\text{cm})$$

Tương tự cũng tính được $DF = 10\sqrt{3}(\text{cm})$ và $EF = 10\sqrt{3}(\text{cm})$.

Như vậy $DE = EF = DF = 10\sqrt{3}(\text{cm})$ nên $\triangle DEF$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EDF} = 60^\circ$.

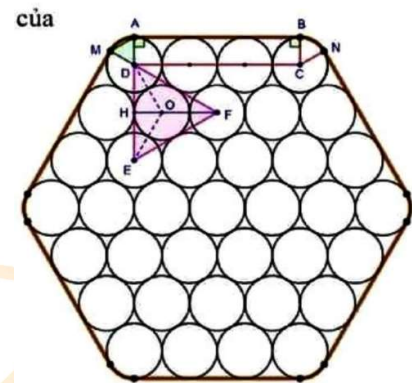
Suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{EDF} = 60^\circ$ (đối đỉnh).

$$\text{Chiều dài cung AM bằng } \frac{\pi \cdot 5 \cdot 60}{180} = \frac{5}{3}\pi (\text{cm}) \quad (2)$$

Từ hình vẽ, kết hợp (1) và (2) ta tính được chiều dài dây đai là:

$$l = 6 \cdot \frac{5}{3}\pi + 6 \cdot 30 = 180 + 10\pi(\text{cm}).$$

Câu 2. (Trường chuyên toán tỉnh Gia Lai năm 2023-2024)



Bạn Tuấn lập kế hoạch tiết kiệm tiền để mua một cái laptop phục vụ cho việc học tập như sau: Hằng tháng, Tuấn tiết kiệm các khoản chi tiêu cá nhân để dành ra một triệu đồng. Vào ngày 01 hàng tháng Tuấn gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình một triệu đồng và bắt đầu gửi vào ngày 01 tháng 7 năm 2023 để hưởng lãi suất 0,5%/tháng theo hình thức lãi kép (nghĩa là tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn để tính lãi cho tháng sau) và duy trì việc này liên tục trong 3 năm. (Biết tài khoản ban đầu của Tuấn là 0 đồng và hàng tháng Tuấn không rút vốn, lãi).

a) Tính số tiền tiết kiệm Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/8/2023.

b) Tính đến ngày 02/10/2023 thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n \geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/7/2026.

Lời giải

a) Ta có: $1.000.000(1 + 0,005) + 1.000.000 = 2.005.000$ (VNĐ)

b) Đến ngày 02/10/2023 thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đến ngày 02/09/2023 số tiền có được trong tài khoản tiết kiệm là:

$$2.005.000(1 + 0,005) + 1.000.000 = 3.015.025 \text{ (VNĐ)}$$

Đến ngày 02/10/2023 số tiền có được trong tài khoản tiết kiệm là:

$$1.000.000[1 + 1,005 + 1,005^2 + 1,005^3] \approx 4.030.100 \text{ (VNĐ)}$$

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n \geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/7/2026.

Sau kỳ gửi tháng thứ n số tiền được tính theo công thức

$$T_n = 1.000.000[1 + 1,005 + 1,005^2 + \dots + 1,005^n]$$

Vào ngày 02/7/2026 bạn Tuấn đã tiết kiệm được 3 năm (36 tháng).

$$T_{36} = 1.000.000[1 + 1,005 + 1,005^2 + \dots + 1,005^{36}]$$

$$1,005T_{36} = 1.000.000[1,005 + 1,005^2 + \dots + 1,005^{36} + 1,005^{37}]$$

$$1,005T_{36} - T_{36} = 1.000.000[1,005^{37} - 1]$$

$$\Rightarrow T_{36} = \frac{1.000.000[1,005^{37} - 1]}{0,005} \approx 40.532.785 \text{ (VNĐ)}$$

Câu 3. (Trường chuyên Đồng Tháp năm 2023-2024)

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua thẻ loại giá x 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x + 4000y = 2023000 \Leftrightarrow 3x + 4y = 2023$

$$\text{Suy ra } y = \frac{2023 - 3x}{4} \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2019}{3} = 673$$

$$\text{Mặt khác ta có } y = \frac{2023 - 3x}{4} = \frac{2024 - 4x - 1 + x}{4} = 506 - x + \frac{x - 1}{4}$$

Để y nguyên thì $x - 1$ chia hết cho 4, suy ra $x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $y = 505 - 3k$.

Do đó $1 \leq 1 + 4k \leq 673 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 168$.

Vậy có 169 cặp $(x; y)$

Câu 4. (Trường chuyên tin SGD Hà Nội năm 2023-2024)

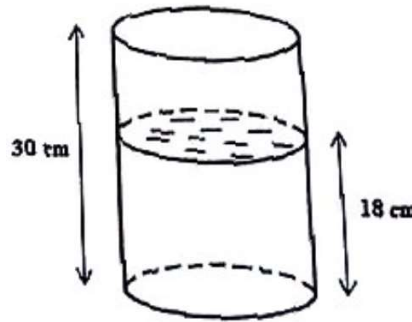
Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi 1 trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, 1 bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ 1 túi bất kì hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. 2 bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Lời giải

Đầu tiên An sẽ bốc 1 viên từ túi thứ hai, hai túi lúc này lần lượt có 18 và 20 viên kẹo. Tại lượt tiếp theo, chiến thuật An sẽ là nếu Bình bốc như thế nào thì An sẽ bốc y hệt như vậy. Khi đó ta thấy Bình sẽ phải bắt đầu bốc với hai túi đều có số chẵn viên kẹo, hay nói riêng, là còn kẹo. Như vậy khi đến lượt An thì An hoàn toàn có thể sao chép cách bốc của Bình, do cứ túi nào mà Bình bốc thì phải còn kẹo. Khi đó đến lượt Bình thì Bình lại phải bốc với hai túi còn số chẵn viên kẹo, và An vẫn có thể lặp lại chiến thuật như trên. Trong quá trình bốc này, ta thấy An luôn có thể bốc kẹo, cho nên An không thể là người thua cuộc, nói cách khác, An sẽ là người thắng cuộc với chiến thuật này.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023-2024)

Có một bình thủy tinh hình trụ cao 30cm chứa nước, diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh, mặt nước cách đáy bình là 18cm (hình vẽ bên). Cần đổ thêm bao nhiêu lít nước nữa để nước vừa đầy bình (Bỏ qua bề dày của bình, cho $\pi = 3,14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) ?



Lời giải

Diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh $\Rightarrow 2\pi r = \frac{1}{6} \cdot 2\pi r \cdot h \Rightarrow h = 3r$

Ta có: $h = 30 \Rightarrow r = 10$

Thể tích nước cần đổ thêm để vừa đầy bình là: $V = \pi r^2 \cdot (h - 18) = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 12 = 3768(\text{cm}^3)$

Câu 5. (Trường chuyên Long An năm 2023-2024)

Nhân dịp kỉ niệm 10 năm thành lập, cửa hàng GNH có thực hiện chương trình giảm giá cho mặt hàng X là 20% và mặt hàng Y là 15% so với giá niêm yết. Bà Giỏi mua 2 món hàng X và 1 món hàng Y phải trả số tiền là 395000 đồng. Ngày cuối cùng của chương trình, cửa hàng thay đổi bằng cách giảm giá mặt hàng X là 30% và mặt hàng Y là 25%. Vào ngày hôm đó, cô Định mua 3 món hàng X và 2 món hàng Y thì trả số tiền là 603000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng X và Y ((giá niêm yết là giá ghi trên món hàng nhưng chưa thực hiện giảm giá)).

Lời giải

Gọi giá niêm yết của mặt hàng X và Y là x, y (đồng)

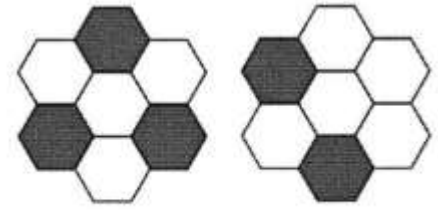
Lập được hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x(1 - 20\%) + y(1 - 15\%) = 395000 \\ 3x(1 - 30\%) + 2y(1 - 25\%) = 603000 \end{cases}$$

Giải được
$$\begin{cases} x = 130000 \\ y = 220000 \end{cases}$$

Kết luận đúng.

Câu 6. (Trường chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2023-2024)

Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen và đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được ô màu như ở Hình 2.

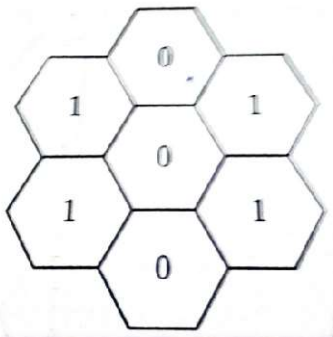


Hình 1

Hình 2

Lời giải

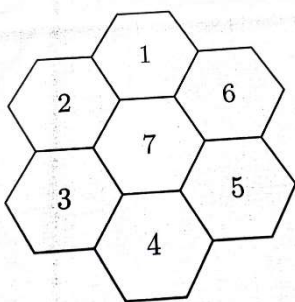
Cách 1. Đánh số vào các hình lục giác như hình vẽ.



Ta xét một hình lục giác được điền số a_i thì $a_i \equiv b_i \pmod{2}$ trong đó b_i là tổng các số được điền trong các hình lục giác chung cạnh với hình lục giác đang xét. Do đó, khi đổi màu theo đề bài thì số dư trong phép chia cho 2 của tổng các số trong các hình lục giác tô đen luôn không đổi.

Đối với hình 1 thì số dư này bằng 1, còn đối với hình 2 thì số dư này bằng 0 nên không thể có cách đổi màu nào biến hình 1 thành hình 2.

Cách 2.



Xét các ô 2,3,5,6. Mỗi bước ta đổi màu hai hoặc cả bốn ô đó nên số ô đen không thay đổi tính chẵn, lẻ. Ban đầu trong bốn ô nói trên có hai ô đen nên không thể có trạng thái trong bốn ô đó có đúng một ô đen.