# MỤC LỤC


| ĐỀ THI VÀO LỚP 10 SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI | | |
|---|---|---|
| NỘI DUNG | TRANG | |
| | Đề | Đáp án |
| Năm học 2010 – 2011 | 3 | 18 |
| Năm học 2011 – 2012 | 4 | 22 |
| Năm học 2012 – 2013 | 5 | 26 |
| Năm học 2013 – 2014 | 6 | 29 |
| Năm học 2014 – 2015 | 7 | 34 |
| Năm học 2015 – 2016 | 8 | 38 |
| Năm học 2016 – 2017 | 9 | 42 |
| Năm học 2017 – 2018 | 10 | 47 |
| Năm học 2018 – 2019 | 11 | 53 |
| Năm học 2019 – 2020 | 12 | 59 |
| Năm học 2020 – 2021 | 13 | 65 |
| Năm học 2021 – 2022 | 14 | 72 |
| Năm học 2022 – 2023 | 15 | 76 |
| Năm học 2023 – 2024 | 16 | 80 |

# A. PHẦN ĐỀ THI

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2010 - 2011**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: /6/2010
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,5 điểm)** Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9},(x\ge 0$ và $x\ne 9)$.

a) Rút gọn $P$.

b) Tìm giá trị của $x$ để $P=\dfrac{1}{3}$.

c) Tìm GTLN của $P$.

**Câu II. (2,5 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $13$ m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là $7$ m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

**Câu III. (1,0 điểm)** Cho Parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-1$.

a) Chứng minh rằng với mọi $m$ thì $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi $x_1,x_2$ là các hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tìm giá trị của $m$ để $x_1^2x_2+x_2^2x_1-x_1x_2=3$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB=2R$ và điểm $C$ thuộc đường tròn đó (C khác $A,B$), $D$ thuộc dây $BC$ ($D$ khác $B,C$). Tia $AD$ cắt cung nhỏ $BC$ tại $E$, tia $AC$ cắt $BE$ tại $F$.

a) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $DA\cdot DE=DB.DC$.

c) Chứng minh $\widehat{CFD}=\widehat{OCB}$. Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$, chứng minh $IC$ là tiếp tuyến của $(O)$.

d) Cho biết $DF=R$, chứng minh $\tan\widehat{AFB}=2$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Giải phương trình $x^2+4x+7=(x+4)\sqrt{x^2+7}$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2011 - 2012**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 22/6/2011
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,5 điểm)** Cho $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x\neq 0$ và $x\geq 25$.

a) Rút gọn biểu thức $A$.

b) Tìm giá trị của $A$ khi $x=9$.

c) Tìm $x$ để $A<\frac{1}{3}$.

**Câu II. (2,5 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình
Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

**Câu III. (1,0 điểm)** Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x-m^2+9$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ khi $m=1$.

b) Tìm $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn tâm $O$, đường kính $AB=2R$. Gọi $d_1$ và $d_2$ lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại hai điểm $A$ và $B$. Gọi $I$ là trung điểm của $OA$ và $E$ là điểm thuộc đường tròn $(O)$ ( $E$ không trùng với $A$ và $B$ ). Đường thẳng $d$ đi qua điểm $E$ và vuông góc với $EI$ cắt hai đường thẳng $d_1, d_2$ lần lượt tại $M, N$.

a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN}=90^\circ$.

c) Chứng minh$AM\cdot BN=AI\cdot BI$.

d) Gọi $F$ là điểm chính giữa của cung $AB$ không chứa $E$ của đường tròn $(O)$. Hãy tính diện tích của tam giác $MIN$ theo $R$ khi ba điểm $E, I, F$ thẳng hàng.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2012 - 2013**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 21/6/2012
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,5 điểm)** 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=36$.

2. Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0, x\ne 16$ ).

3. Với các biểu thức $A$ và $B$ nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của $x$ để biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

**Câu III. (1,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}$.

2. Cho phương trình: $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ (ẩn $x$ ). Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thoả mãn $x_1^2+x_2^2=7$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O;R)$ và đường kính $AB$. Bán kính $CO$ vuông góc với $AB, M$ là điểm bất kì trên cung nhỏ $AC$ ( $M$ khác $A$ và $C$), $BM$ cắt $AC$ tại $H$. Gọi $K$ là hình chiếu của $H$ trên $AB$.

1) Chứng minh rằng tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $\widehat{ACM}=\widehat{ACK}$.

3) Trên đoạn thẳng $BM$ lấy điểm $E$ sao cho $BE=AM$. Chứng minh rằng tam giác $ECM$ là tam giác vuông cân tại $C$.

4) Gọi $d$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại điểm $A$. Gọi $P$ là một điểm nằm trên $d$ sao cho hai điểm $P,C$ nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ $AB$ và $\dfrac{AP\cdot MB}{MA}=R$.

Chứng minh rằng đường thẳng $PB$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $HK$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $x,y$ là các số dương thoả mãn điều kiện $x\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2013 - 2014
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 13/6/2013
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Với $x>0$, cho hai biểu thức $A=\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=64$.
2. Rút gọn biểu thức $B$.
3. Tìm $x$ để $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Quãng đường từ $A$ đến $B$ dài $90$ km. Một người đi xe máy từ $A$ đến $B$. Khi đến $B$, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về $A$ với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là $9\ km/h$. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ $A$ đến lúc trở về đến $A$ là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ $A$ đến $B$.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}$.

2. Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-\dfrac{1}{2}m^2+m+1$.

a) Với $m=1$, xác định tọa độ các giao điểm $A, B$ của (d) và $(P)$.

b) Tìm các giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ và điểm $A$ nằm bên ngoài $(O)$. Kẻ hai tiếp tuyến $AM$, $AN$ với đường tròn $(O)$ (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua $A$ cắt đường tròn $(O)$ tại hai điểm $B$ và $C$ ($AB<AC$, d không đi qua tâm O).

1. Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2=AB\cdot AC$.
Tính độ dài đoạn thẳng $BC$ khi $AB=4$ cm, $AN=6$ cm.
3. Gọi I là trung điểm của $BC$. Đường thẳng NI cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $T$. Chứng minh $MT // AC$.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại $B$ và $C$ cắt nhau ở $K$. Chứng minh $K$ thuộc một đường thẳng cố định khi $d$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $a,b,c$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$, chứng minh: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge 3$

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2014 - 2015**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 23/6/2014
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** 1. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x=9$

2. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với x > 0 và x khác 1

a) Chứng minh rằng $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm các giá trị của x để $2P=2\sqrt{x}+5$

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

**Câu III. (2,0 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{1}{y-1}=5\\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{y-1}=-1\end{cases}$.

2. Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng $(d): y=-x+6$ và parabol $(P): y=x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của $(d)$ và $(P)$.

b) Gọi $A,B$ là hai giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tính diện tích của tam giác $AOB$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** . Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính $AB$ cố định. Vẽ đường kính $MN$ của đường tròn $(O;R)$ ($M$ khác $A$, $M$ khác $B$). Tiếp tuyến tại $B$ của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng $AM, AN$ lần lượt tại các điểm $Q,P$.

1) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh 4 điểm $M,N,P,Q$ cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi $E$ là trung điểm của $BQ$. Đường thẳng vuông góc với $OE$ tại $O$ cắt $PQ$ tại điểm $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $BP$ và $ME // NF$.

4) Khi đường kính $MN$ quay quanh tâm $O$ và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính $MN$ để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $a,b,c$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ca}+\sqrt{2c+ab}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2015 - 2016**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 11/6/2015
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $P=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x>0, x\neq 4$.

1. Tính giá trị của biểu thức $P$ khi $x=9$
2. Rút gon biểu thức $Q$.
3. Tìm giá trị của $x$ để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình
Một tàu tuần tra chạy ngược dòng $60$ km, sau đó chạy xuôi dòng $48$ km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là $2$ km / giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(x+y)+\sqrt{x+1}=4\\(x+y)-3\sqrt{x+1}=-5\end{cases}$.

2. Cho phương trình $x^2-(m+5)x+3m+6=0$ ($x$ là ẩn số).

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực $m$.

b) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $5$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho nửa đường tròn tâm $O$ có đường kính $AB$. Lấy điểm $C$ trên đoạn thẳng $AO$ ($C$ khác $A, C$ khác $O$). Đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$ cắt nửa đường tròn tại $K$. Gọi $M$ là điểm bất kì trên cung $KB$ ($M$ khác $K, M$ khác $B$). Đường thẳng $CK$ cắt các đường thẳng $AM, BM$ lần lượt tại $H$ và $D$. Đường thẳng $BH$ cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai $N$.

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA.CB=CH.CD$.
3. Chứng minh ba điểm $A,N,D$ thẳng hàng và tiếp tuyến tại $N$ của nửa đường tròn đi qua trung điểm của $DH$.
4. Khi $M$ di động trên cung $KB$, chứng minh đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với hai số thực không âm $a,b$ thỏa mãn $a^2+b^2=4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{ab}{a+b+2}$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2016 - 2017**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 8/6/2016
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=25$

2. Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

3. Tìm $x$ để biểu thức $P=A\cdot B$ có giá trị là số nguyên

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720\ m^2$. Nếu tăng chiều dài thêm $10\ m$ và giảm chiều rộng $6\ m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\ \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=3x+m^2-1$ và Parabol $(P): y=x^2$.

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt với mọi $m$.

b) Gọi $x_1$ và $x_2$ là hoành độ các giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tìm $m$ để $(x_1+1)(x_2+1)=1$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ và một điểm $A$ nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến $AB$ với đường tròn $(O)$ ( $B$ là tiếp điểm) và đường kính $BC$. Trên đoạn thẳng $CO$ lấy điểm $I$ ( $I$ khác $C, I$ khác $O$ ). Đường thẳng $AI$ cắt $(O)$ tại hai điểm $D$ và $E$ ( $D$ nằm giữa $A$ và $E$ ). Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $DE$.

1. Chứng minh bốn điểm $A,B,O,H$ cùng nằm trên một đường tròn

2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$.

3. Đường thẳng $d$ đi qua điểm $E$ song song với $AO, d$ cắt $BC$ tại điểm $K$. Chứng minh $HK // DC$.

4. Tia $CD$ cắt $AO$ tại điểm $P$, tia $EO$ cắt $BP$ tại điểm $F$. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với các số thực $x,y$ thoả mãn $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2017 - 2018**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 9/6/2017
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\ge 0, x\ne 25$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$

2. Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để $A=B\cdot|x-4|$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ $A$ để đi đến $B$ với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường $AB$ dài 120 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên xe ô tô đến $B$ sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5\\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=mx+5$.

a) Chứng minh đường thẳng $(d)$ luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của $m$.

b) Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1, x_2$ (với $x_1<x_2$) sao cho $|x_1|>|x_2|$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ ngoại tiếp tam giác nhọn $ABC$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $AB$ và cung nhỏ $BC$. Hai dây $AN$ và $CM$ cắt nhau tại điểm $I$. Dây $MN$ cắt các cạnh $AB$ và $BC$ lần lượt tại các điểm $H$ và $K$.

1. Chứng minh bốn điểm $C, N, K, I$ cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2=NK.NM$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi $P, Q$ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $MBK$, tam giác $MCK$ và $E$ là trung điểm của đoạn $PQ$. Vẽ đường kính $ND$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh ba điểm $D, E, K$ thẳng hàng.

**Câu V. (0,5 điểm)** Cho các số thực $a,b,c$ thay đổi luôn thỏa mãn: $a\ge 1, b\ge 1, c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

--------------------------------- HẾT ---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2018 - 2019**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 7/6/2018
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$

2. Chứng minh $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để $\dfrac{A}{B}\ge\dfrac{x}{4}+5$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 28 mét, độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài chiều rộng của mảnh đất đó theo mét.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x-|y+2|=3\\ x+2|y+2|=3\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=(m+2)x+3$, $(P): y=x^2$

a) Chứng minh $(d)$ và $(P)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt .

b) Tìm tất cả các giá trị $m$ để $(d)$ và $(P)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên .

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung $AB$ không đi qua tâm. Lấy $S$ là một điểm bất kì trên tia đối của tia $AB$ ( $S$ khác $A$ ). Từ điểm $S$ vẽ hai tiếp tuyến $SC, CD$ với đường tròn $(O;R)$ sao cho điểm $C$ nằm trên cung nhỏ $AB$ ($C, D$ là các tiếp điểm). Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$

1. Chứng minh năm điểm $C, D, H, O, S$ thuộc đường tròn đường kính $SO$.
2. Khi $SO=2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng $SD$ theo $R$ và tính số đo góc $SCD$.
3. Đường thẳng đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $SC$, cắt đoạn thẳng $CD$ tại $K$. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng $BK$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $SC$.
4. Gọi $E$ là trung điểm của đường thẳng $BD$ và $F$ là hình chiếu vuông góc của điểm $E$ trên đường thẳng $AD$. Chứng minh rằng, khi điểm $S$ thay đổi trên tia đối của tia $AB$ thì điểm $F$ luôn thuộc một đường tròn cố định.

**Câu V. (0,5 điểm)** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2019 - 2020**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 2/6/2019
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0;x\ne 25$

.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$
2. Rút gọn biểu thức $B$.
3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $x$ để biểu thức $P=A\cdot B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được $25\%$ công việc. Hỏi mỗi đội làm riêng thì bao nhiêu ngày mới hoàn thành xong công việc trên?

2. Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao $1,75m$ và diện tích đáy là $0,32m^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước)

**Câu III. (2,5 điểm)**

1. Giải phương trình: $x^4-7x^2-18=0$.
2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $\left(d\right):y=2mx-m^2+1$ và parabol $\left(P\right):y=x^2$

a) Chứng minh $\left(d\right)$ luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{-2}{x_1x_2}+1$.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Hai đường cao $BE$ và $CF$ của tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $H$.

1. Chứng minh bốn điểm $B,C,E,F$ cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.
3. Gọi $K$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Đường thẳng $AO$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $I$, đường thẳng $EF$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm $P$. Chứng minh tam giác $APE$ đồng dạng với tam giác $AIB$ và đường thẳng $KH$ song song với đường thẳng $IP$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Cho biểu thức $P=a^4+b^4-ab$ với $a,b$ là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+ab=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P$

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2020 - 2021**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+5}{x-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=4$

2. Chứng minh $B=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để biểu thức $P=2A.B+\sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1) Giải bài toán san bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Quãng đường từ nhà An đến nhà Bình dài 3 km. Buổi sáng, An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình. Buổi chiều cùng ngày, An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An trên cùng quãng đường đó với vận tốc lớn hơn vận tốc đi bộ của An là 9km/h. Tính vận tốc đi bộ của An, biết thời gian đi buổi chiều ít hơn thời gian đi buổi sáng là 45 phút. (Giả định rằng An đi bộ với vận tốc không đổi trên toàn bộ quãng đường đó).

2. Một quả bóng bàn có dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi\approx 3{,}14$).

**Câu III. (2,5 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+\dfrac{3}{y-1}=5\\ 4x-\dfrac{1}{y-1}=3\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét đường thẳng $(d): y=mx+4$ với $m\ne 0$.

a) Gọi $A$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ và trục $Oy$. Tìm tọa độ của điểm $A$.

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt trục $Ox$ tại điểm $B$ sao cho tam giác $OAB$ là tam giác cân.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và đường cao BE. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm E đến các đường thẳng AB và BC.

1) Chứng minh tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $BH.BA=BK.BC$.

3) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng.

**Câu V. (0,5 điểm)** Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}=x^2+1$

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2021 - 2022**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 13/6/2021
Thời gian làm bài: **90 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=16$.
2. Chứng minh $A+B=\frac{3}{\sqrt{x}+3}$.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)
2. Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao $1,6\text{ m}$ và bán kính đáy $0,5\text{ m}$. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi\approx 3,14$ ).

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{3}{x+1}-2y=-1\\ \frac{5}{x+1}+3y=11\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m-2$.
Tìm tất cả giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Vẽ đường tròn tâm $C$, bán kính $CA$. Từ điểm $B$ kẻ tiếp tuyến $BM$ với đường tròn $(C;CA)$ ( $M$ là tiếp điểm, $M$ và $A$ nằm khác phía đối với đường thẳng $BC$ ).

1. Chứng minh bốn điểm $A, C, M$ và $B$ cùng thuộc một đường tròn.
2. Lấy điểm $N$ thuộc đoạn thẳng $AB$ ( $N$ khác $A, N$ khác $B$ ). Lấy điểm $P$ thuộc tia đối của tia $MB$ sao cho $MP=AN$. Chứng minh tam giác $CPN$ là tam giác cân và đường thẳng $AM$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $NP$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với các số thực $a$ và $b$ thỏa mãn $a^2+b^2=2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3(a+b)+ab$.

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2022 - 2023**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 19/6/2022
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{x+4}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$.

2. Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

3. Tìm số nguyên dương $x$ lớn nhất thỏa mãn $A-B<\dfrac{3}{2}$.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm $A$ và đi đến địa điểm $B$. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là $20\text{ km/h}$ nên ô tô đến $B$ sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường $AB$ dài $60\text{ km}$, tính vận tốc của mỗi xe. (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường $AB$.)

2. Quả bóng đá thường được sử dụng trong các trận thi đấu dành cho trẻ em từ 6 tuổi đến 8 tuổi có dạng một hình cầu với bán kính bằng $9{,}5\text{ cm}$. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đó (lấy $\pi\approx 3{,}14$ ).

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\dfrac{12}{y+2}=5 \\ 3x-\dfrac{4}{y+2}=2 \end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m^2$.

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1)=-3$.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại đinh $A$. Gọi $E$ là một điểm bất kỳ trên tia $CA$ sao cho điểm $A$ nằm giữa hai điểm $C$ và $E$. Gọi $M$ và $H$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm $A$ đến các đường thẳng $BC$ và $BE$.

1. Chứng minh tứ giác $AMBH$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $BC\cdot BM=BH.BE$ và $HM$ là tia phân giác của góc $AHB$.
3. Lấy điểm $N$ sao cho $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $AN$. Gọi $K$ là giao điểm của hai đường thẳng $EN$ và $AB$. Chứng minh ba điểm $H, K, M$ là ba điểm thẳng hàng.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $x^2+y^2=4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2023 - 2024**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 11/6/2023
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x>0, x\neq 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$.

2. Chứng minh $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3. Tìm tất cả giá trị của $x$ để $A\cdot B=4$.

**Câu II. (2,0 điểm)** 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Theo kế hoạch, một phân xưởng phải làm xong 900 sản phẩm trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày phân xưởng đã làm được nhiều hơn 15 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 3 ngày trước khi hết thời hạn, phân xưởng đã làm xong 900 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà phân xưởng làm được trong mỗi ngày là bằng nhau.)
2. Một khối gỗ dạng hình trụ có bán kính đáy là 30 cm và chiều cao là 120 cm. Tính thể tích của khối gỗ đó (lấy $\pi\approx 3,14$).

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2}{x-3}-3y=1\\ \dfrac{3}{x-3}+2y=8\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+2)x-m$.

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi $x_1$ và $x_2$ là hoành độ các giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_1+x_2-2}$

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn $(O)$. Tiếp tuyến tại điểm $A$ của đường tròn $(O)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $S$. Gọi $I$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $O$ đến đường thẳng $BC$.
1. Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi $H$ và $D$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm $A$ đến các đường thẳng $SO$ và $SC$. Chứng minh $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.
3. Vẽ đường cao $CE$ của tam giác $ABC$. Gọi $Q$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Đường thẳng $QD$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm
$K$. Chứng minh $BQ.BA=BD.BI$ và đường thẳng $CK$ song song với đường thẳng $SO$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Cho hai số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $a+b\le 2$. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+b}+\dfrac{b^2}{b^2+a}\le 1$.

# B. PHẦN ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2010 - 2011**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: /6/2010
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,5 điểm)** Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9},(x\ge 0 \text{ và } x\ne 9)$.

a) Rút gọn $P$.

b) Tìm giá trị của $x$ để $P=\dfrac{1}{3}$.

c) Tìm GTLN của $P$.

**Lời giải**

a) $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}$.

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.$$

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-\left(3x+9\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.$$

$$P=\frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.$$

$$P=\frac{3\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.$$

$$P=\frac{3\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}.$$

$$P=\frac{3}{\sqrt{x}+3}.$$

b) $P=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=9\Leftrightarrow \sqrt{x}=6\Leftrightarrow x=36$.

c) Ta có $x\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x}+3\ge 3\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\le \dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\le 1\Leftrightarrow P\le 1$.

Vậy $P_{max}=1$, dấu bằng xảy ra khi $x=0$.

**Câu II. (2,5 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $13$ m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là $7$ m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

**Lời giải**

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là $x\left(\,m\right)(3<x<13)$.

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng là $7\,m$ nên chiều dài hình chữ nhật là $x+7\left(\,m\right)$.

Theo đề, ta có phương trình: $x^2+\left(x+7\right)^2=13^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+14x-120=0 \Leftrightarrow x^2+7x-60=0$.

$\Delta=289>0$ nên phương trình có hai nghiệm $x=5$ (thoả mãn) hoặc $x=-12$ (loại)

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là $5\,m$; chiều dài là $12\,m$.

**Câu III. (1,0 điểm)** Cho Parabol $\left(P\right): y=-x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y=mx-1$.

a) Chứng minh rằng với mọi $m$ thì $\left(d\right)$ luôn cắt $\left(P\right)$ tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi $x_1, x_2$ là các hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$. Tìm giá trị của $m$ để $x_1^2x_2+x_2^2x_1-x_1x_2=3$.

**Lời giải**

a) Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2=mx-1 \Leftrightarrow x^2+mx-1=0$. (*)

Ta có $\Delta=m^2+4>0\,\forall m$, suy ra phương trình $\left(*\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

Vậy $d$ luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

b) Phương trình $\left(*\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

Áp dụng hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$

Ta có $x_1^2x_2+x_2^2x_1-x_1x_2=3 \Leftrightarrow x_1x_2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2=3$.

$\Rightarrow -1.\left(-m\right)-\left(-1\right)=3 \Leftrightarrow m=2$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính $AB=2R$ và điểm $C$ thuộc đường tròn đó ($C$ khác $A, B$), $D$ thuộc dây $BC$($D$ khác $B, C$). Tia $AD$ cắt cung nhỏ $BC$ tại $E$, tia $AC$ cắt $BE$ tại $F$.

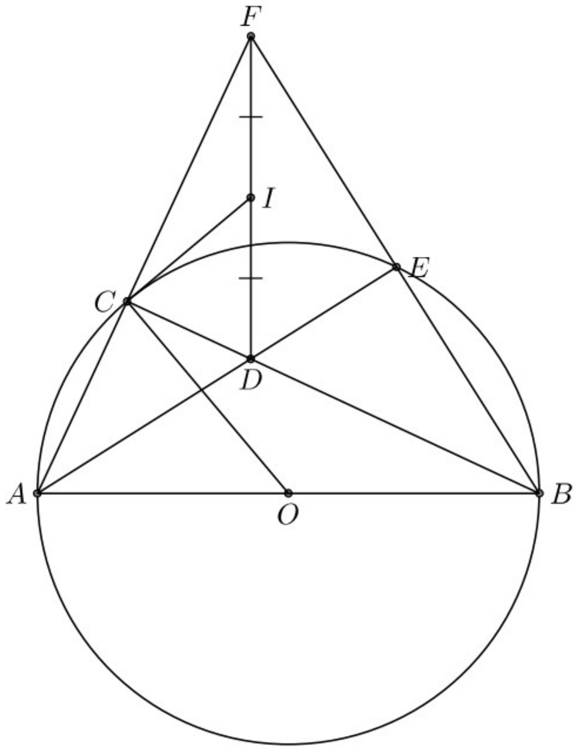
a) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $DA\cdot DE=DB.DC$.

c) Chứng minh $\widehat{CFD}=\widehat{OCB}$. Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$, chứng minh $IC$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

d) Cho biết $DF=R$, chứng minh $\tan\widehat{AFB}=2$.

**Lời giải**




a) Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $\widehat{DCF} = 90^\circ$ (kề bù với góc $\widehat{ACB}$ ).

Tương tự $\widehat{DEF} = 90^\circ$.

Tứ giác $FCDE$ có $\widehat{DCF} + \widehat{DEF} = 180^\circ$

Mà hai góc này đối nhau

Vậy tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét $\Delta DCA$ và $\Delta DEB$ có

$\widehat{ACD} = \widehat{DEB} = 90^\circ$

$\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta DCA \backsim \Delta DEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DE} \Leftrightarrow DA \cdot DE = DB \cdot DC$.

c) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DCFE$ có $\widehat{CFD} = \widehat{CED}$ (cùng chắn cung $CD$ )

Xét đường tròn $(O), \widehat{CED} = \widehat{CBA}$ (cùng chắn cung $AC$ )

Mặt khác $OB = OC = R$ suy ra $\Delta OBC$ cân tại $O$ suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.

$I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$ nên $I$ là trung điểm $DF$.

Xét đường tròn $(I), IC = ID$ suy ra $\Delta ICD$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{IDC}$.

Ta có $\widehat{ICD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

suy ra $\widehat{IDC} + \widehat{CFD} = 90^\circ$, mà $\widehat{IDC} = \widehat{ICD}(\text{cmt}), \widehat{CFD} = \widehat{OCB}(\text{cmt})$

suy ra $\widehat{ICD} + \widehat{OCB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ \Leftrightarrow IC \perp OC$, mà $OC$ là bán kính của $(O)$ nên $IC$ là tiếp tuyến của $(O)$.

d) Ta có $\Delta CBA \backsim \Delta CFD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CB}{CF} = \dfrac{BA}{FD}$.

Mà $FD = R; BA = 2R$ nên $\dfrac{CB}{CF} = \dfrac{BA}{FD} = 2$.

Ta có $\tan\widehat{AFB} = \tan\widehat{CFB} = \dfrac{CB}{CF} = 2$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Giải phương trình $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2+7}$.

**Lời giải**

Đặt $t = \sqrt{x^2+7}$, phương trình dã cho trở thành $t^2 + 4x = (x+4)t$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x+4)t + 4x = 0 \Leftrightarrow (t-x)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = 4. \end{array}\right.$$

TH1: $\sqrt{x^2+7} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 7 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

TH2: $\sqrt{x^2+7} = x \ (x \geq 0) \Rightarrow x^2 + 7 = x^2 \Leftrightarrow 7 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-3; 3\}$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2011 - 2012**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 22/6/2011
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,5 điểm)** Cho $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x\neq 0$ và $x\geq 25$.

a) Rút gọn biểu thức $A$.

b) Tìm giá trị của $A$ khi $x=9$.

c) Tìm $x$ để $A<\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

a) $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}==\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+5\right)}{x-25}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5\left(\sqrt{x}-5\right)}{x-25}=\frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{x-25}$

$=\frac{x-10\sqrt{x}+25}{x-25}=\frac{(\sqrt{x}-5)^2}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}=\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$.

b) Với $x=9\Rightarrow A=\frac{\sqrt{9}-5}{\sqrt{9}+5}=-\frac{1}{4}$

c) $A<\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}<\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}<20\Leftrightarrow 0\leq x<100$.

Kết hợp với kiều kiện xác định ta có $\begin{cases}0<x<100\\ x\neq 25\end{cases}$.

**Câu II. (2,5 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

**Lời giải**

Gọi số tấn hàng mỗi ngày đội xe phải chở theo kế hoạch là x (tấn) $\left(x>0\right)$

Thời gian chở hàng theo kế hoạch là y (ngày) $\left(y\in\mathbb{N}^*\right)$

Theo kế hoạch đội xe phải 140 tấn hàng nên ta có phương trình $xy=140$ (1)

Số tấn hàng mỗi ngày đội xe phải chở theo thực tế là $x+5$ (ngày)

Thời gian chở hàng theo thực tế là $y-1$ (ngày)

Vì đội xe chở thêm được 10 tấn nên ta có phương trình $\left(x+5\right)\left(y-1\right)=150$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}xy=140\\ \left(x+5\right)\left(y-1\right)=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=140\\ xy-x+5y-5=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=140\\ -x+5y=15\end{cases}$

$\Rightarrow 5y - 15y - 140 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 7\ (tm) \\ y = 4\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy đội xe chở hết hàng theo kế hoạch trong 7 ngày.

**Câu III. (1,0 điểm)** Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m^2 + 9$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ khi $m = 1$.

b) Tìm $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

**Lời giải**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(d)$ khi $m = 1$ là $x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(-2;4)$

Với $x = 4 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow B(4;16)$

Vậy tọa độ giao điểm của $(P)$ và $(d)$ là $A(-2;4); B(4;16)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(d)$ là $x^2 = 2x - m^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m^2 - 9 = 0 (1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Vậy $-3 < m < 3$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn tâm $O$, đường kính $AB = 2R$. Gọi $d_1$ và $d_2$ lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại hai điểm $A$ và $B$. Gọi $I$ là trung điểm của $OA$ và $E$ là điểm thuộc đường tròn $(O)$ ( $E$ không trùng với $A$ và $B$ ). Đường thẳng $d$ đi qua điểm $E$ và vuông góc với $EI$ cắt hai đường thẳng $d_1, d_2$ lần lượt tại $M, N$.

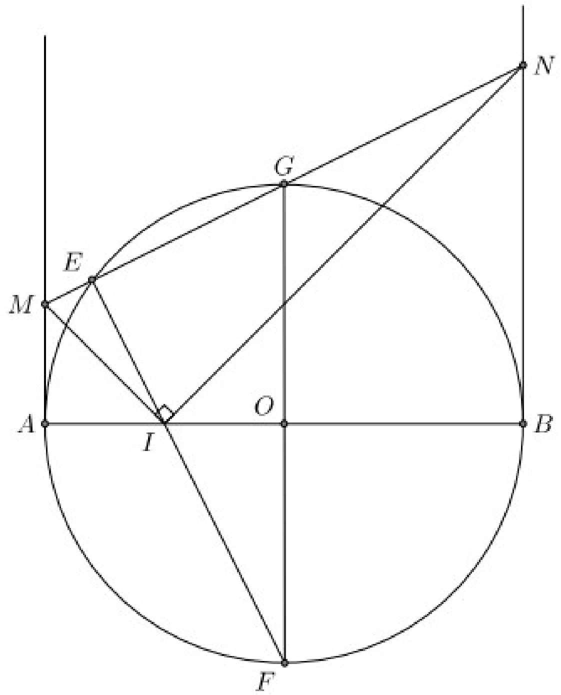
a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^\circ$.

c) Chứng minh $AM \cdot BN = AI \cdot BI$.

d) Gọi $F$ là điểm chính giữa của cung $AB$ không chứa $E$ của đường tròn $(O)$. Hãy tính diện tích của tam giác $MIN$ theo $R$ khi ba điểm $E, I, F$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp:

Xét tứ giác $MAIE$ có 2 góc vuông là $A$ và góc $E$ (đối nhau), nên $MAIE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $MI$.

b) Tương tự, ta có $ENBI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $IN$. Vậy $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{EI}$.) Tương tự $\widehat{EMI}=\widehat{EAI}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{EI}$.) Mà $\widehat{EAI}+\widehat{EBI}=90^\circ$($\triangle EAD$ vuông tại $E$), suy ra $\widehat{MIN}=180^\circ-\left(\widehat{EMI}+\widehat{ENI}\right)=90^\circ$.

c) Do $\triangle MAI\backsim\triangle IBN\Rightarrow\dfrac{AM}{IB}=\dfrac{AI}{BN}\Leftrightarrow AM\cdot BN=AI\cdot BI\left(1\right)$.

d) Gọi G là điểm đối xứng của $F$ qua $AB$. Ta có $AM+BN=2OG\left(2\right)$. (Vì tứ giác $AMNB$ là hình thang và có OG là đường trung bình)

Ta có $AI=\dfrac{R}{2};BI=\dfrac{3R}{2}$.

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}AM+BN=2R\\AM\cdot BN=\dfrac{3R^2}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow AM;BN$ là nghiệm của phương trình $x^2-2Rx+\dfrac{3R^2}{4}=0$.

Từ đó, suy ra $AM=\dfrac{R}{2}$ và $BN=\dfrac{3R}{2}\Rightarrow\triangle MAI$ và $\triangle NBI$ là các tam giác vuông cân $\Rightarrow MI=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ và

$NI=\dfrac{3R\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S_{\triangle MIN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{R}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{3R}{\sqrt{2}}=\dfrac{3R^2}{4}$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2 - 3x + \dfrac{1}{4x} + 2011$.

**Lời giải**

Ta có $M = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + x + \dfrac{1}{4x} + 2010 \geq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{4x}} + 2010 = 2011$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M$ là 2011.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2012 - 2013
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 21/6/2012
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,5 điểm)** 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=36$.

2. Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0, x\ne 16$ ).

3. Với các biểu thức $A$ và $B$ nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của $x$ để biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

**Lời giải**

1. Thay $x=36$ biểu thức $A$ ta có $A=\dfrac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2}=\dfrac{5}{4}$

2. $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)+4\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+16}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-16}$

3. $B(A-1)=\dfrac{2}{x-16}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-16\in\{-1;1;-2;2\}\Leftrightarrow x\in\{14,15,17,18\}$

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

**Lời giải**

Gọi $x,y(y>x>0)$ theo thứ tự là thời gian để người thứ nhất, người thứ hai hoàn thành công việc khi làm một mình.

Khi đó $\dfrac{1}{x}$ là công việc người thứ nhất hoàn thành trong 1 giờ, $\dfrac{1}{y}$ là công việc người thứ hai hoàn thành trong 1 giờ. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y-x=2 \\ \dfrac{12}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y-x=2 \\ \dfrac{12}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}\right)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình cần 4 giờ, người thứ hai làm một mình cần 6 giờ.

**Câu III. (1,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$.

2. Cho phương trình: $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ (ẩn $x$ ). Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thoả mãn $x_1^2+x_2^2=7$.

**Lời giải**

1. ĐKXĐ: $x\neq 0;\ y\neq 0$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{10}{x}=5\\ \dfrac{2}{y}=\dfrac{6}{x}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\text{ (thoả mãn)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;1)$

2. $\Delta=4m^2+1>0$ với mọi $m$ cho nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1+x_2=4m-1, x_1x_2=3m^2-2m$.

$$x_1^2+x_2^2=7\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-7=0\Leftrightarrow 10m^2-4m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{5}\end{array}\right..$$

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O;R)$ và đường kính $AB$. Bán kính $CO$ vuông góc với $AB,M$ là điểm bất kì trên cung nhỏ $AC$ ( $M$ khác $A$ và $C$),$BM$ cắt $AC$ tại $H$. Gọi $K$ là hình chiếu của $H$ trên $AB$.

1) Chứng minh rằng tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

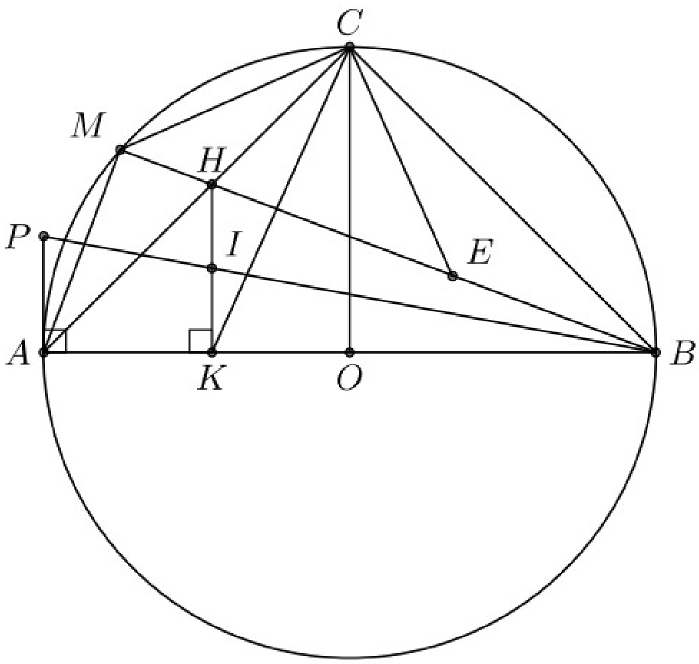
2) Chứng minh rằng $\widehat{ACM}=\widehat{ACK}$.

3) Trên đoạn thẳng $BM$ lấy điểm $E$ sao cho $BE=AM$. Chứng minh rằng tam giác $ECM$ là tam giác vuông cân tại $C$.

4) Gọi $d$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại điểm $A$. Gọi $P$ là một điểm nằm trên $d$ sao cho hai điểm $P,C$ nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ $AB$ và $\dfrac{AP\cdot MB}{MA}=R$.

Chứng minh rằng đường thẳng $PB$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $HK$.

**Lời giải**




a) Ta có $\widehat{HKB}=\widehat{HCB}=90^{\circ}$ cho nên tứ giác $CBHK$ nội tiếp.

b) Các tứ giác $ABCM$ và $CBHK$ nội tiếp suy ra $\widehat{ACM}=\widehat{ABM}=\widehat{ACK}$.

c) Hai tam giác $MAC$ và $EBC$ có $\widehat{MAC}=\widehat{EBC}, MA=BE$ và $AC=BC$ cho nên hai tam giác bằng nhau, suy ra $MC=EC$ (1) và $\widehat{ACM}=\widehat{BCE}; \widehat{MCE}=\widehat{ACM}+\widehat{ACE}=\widehat{ACE}+\widehat{BCE}=90^{\circ}$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác $ECM$ vuông cân tại $C$.

d) Ta có $\dfrac{IK}{AP}=\dfrac{KB}{2R}\Rightarrow IK=\dfrac{AP\cdot KB}{2R}=\dfrac{R\cdot MA\cdot KB}{2R\cdot MB}$

Dễ thấy hai tam giác vuông $ABM$ và $HBK$ đồng dạng cho nên $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{HK}{KB}$

Từ (1) và (2) suy ra $IK=\dfrac{HK}{2}$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $x,y$ là các số dương thoả mãn điều kiện $x\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

**Lời giải**

Đặt $t=\dfrac{x}{y}\ge 2\Rightarrow M=\dfrac{t^2+1}{t}$.

Xét hiệu $M-\dfrac{5}{2}=\dfrac{t^2+1}{t}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{(t-2)(2t-1)}{2t}\ge 0$ với mọi $t\ge 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M$ bằng $\dfrac{5}{2}$ khi $x=2y$.

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2013 - 2014**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: /6/2013
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Với $x>0$, cho hai biểu thức $A=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=64$.
2. Rút gọn biểu thức $B$.
3. Tìm $x$ để $\frac{A}{B}>\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

1. Thay $x=64$ (thỏa mãn) vào biểu thức $A$ ta được $A=\frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}}=\frac{2+8}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

Vậy với $x=64$ thì $A=\frac{5}{4}$

2. $B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-1+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$.

3. Ta có $\frac{A}{B}>\frac{3}{2}$ thì $\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$

Ta thấy $2\sqrt{x}>0$ suy ra $\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow 2-\sqrt{x}>0\Leftrightarrow 2>\sqrt{x}\Leftrightarrow x<4$.

Vậy $0<x<4$ thì $\frac{A}{B}>\frac{3}{2}$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Quãng đường từ $A$ đến $B$ dài $90\text{ km}$. Một người đi xe máy từ $A$ đến $B$. Khi đến $B$, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về $A$ với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là $9\text{ km/h}$. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ $A$ đến lúc trở về đến $A$ là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ $A$ đến $B$.

**Lời giải**

Gọi vận tốc xe máy lúc đi là $x\left(\text{km/h}\right)$ (Điều kiện: $x>0$).

Vì vận tốc xe máy lúc về lớn hơn vận tốc lúc đi là $9\left(\text{km/h}\right)$ nên vận tốc lúc về là $x+9\left(\text{km/h}\right)$.

Suy ra thời gian lúc đi là $\frac{90}{x}$ (giờ). Thời gian lúc về là $\frac{90}{x+9}$ (giờ).

Khi đến $B$ xe nghỉ lại 30 phút $=\frac{1}{2}$ giờ. Mà tổng thời gian cả đi và về là 5 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{90}{x}+\frac{90}{x+9}+\frac{1}{2}=5\Leftrightarrow 9x^2-279x-1620=0\Leftrightarrow x^2-31x-180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\ (\text{ktm})\\ x=36\ (\text{tm})\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc xe máy lúc đi là $36\ km/h$.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}$.

2. Cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1$.

a) Với $m=1$, xác định tọa độ các giao điểm $A, B$ của (d) và $(P)$.

b) Tìm các giá trị của m để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$

**Lời giải**

1. $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+4y=1\\3x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+4y=1\\6x-4y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}11x=11\\3x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\3-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;-1)$

2. (a) Thay $m=1$ vào $(d)$ ta có $y=x-\frac{1}{2}+2=x+\frac{3}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$

$\frac{1}{2}x^2=x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2=2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1=-1, x_2=3$.

Với $x=-1$ thay vào $(P): y=\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Với $x=3$ thay vào $(P): y=\frac{9}{2} \Rightarrow B\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

(b) Xét phương trình hoành độ của $(d)$ và $(P)$ ta có:

$\frac{1}{2}x^2=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-2m-2$

Xét $\Delta'=m^2-(m^2-2m-2)=2m+2$.

Để $(d)$ và $(P)$ giao nhau tại hai điểm phân biệt thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow 2m+2>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1\cdot x_2=m^2-2m-2\end{cases}$.

Theo bài ra ta có: $|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$

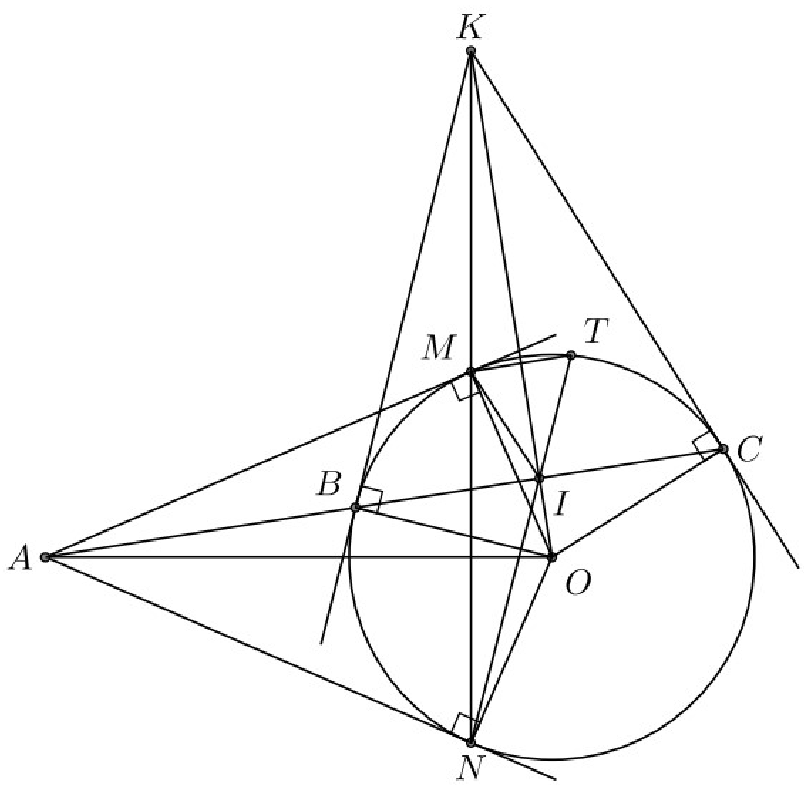
$\Leftrightarrow (2m)^2-4(m^2-2m-2)=4 \Leftrightarrow 2m+2=1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$. (tm)

Vậy $m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ và điểm $A$ nằm bên ngoài $(O)$. Kẻ hai tiếp tuyến $AM$, $AN$ với đường tròn $(O)$ ($M, N$ là các tiếp điểm). Một đường thẳng $d$ đi qua $A$ cắt đường tròn $(O)$ tại hai điểm $B$ và $C$ ($AB < AC$, $d$ không đi qua tâm O).

1. Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB \cdot AC$.
 Tính độ dài đoạn thẳng $BC$ khi $AB = 4$ cm, $AN = 6$ cm.
3. Gọi I là trung điểm của $BC$. Đường thẳng NI cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $T$. Chứng minh $MT // AC$.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại $B$ và $C$ cắt nhau ở $K$. Chứng minh $K$ thuộc một đường thẳng cố định khi $d$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Lời giải**




a) Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{AMO} = 90^\circ$ (Tính chất tiếp tuyến).

Do đó: $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AMON$ nội tiếp.

b) Xét $\Delta AMB$ và $\Delta ACM$ có

$\widehat{MAC}$ chung

$\widehat{MCA} = \widehat{AMB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MB}$ )

Suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta ACM$. (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AM}$ (Tính chất tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow AM^2 = AB \cdot AC$.
Mà $AM = AN$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
Vậy $AN^2 = AB \cdot AC$. (đpcm)
Ta có $AN^2 = AB \cdot AC \Rightarrow 36 = 4 \cdot AC \Rightarrow AC = 9\left(\text{ cm}\right)$.
Mà $AC = AB + BC \Rightarrow BC = AC - AB = 9 - 4 = 5\left(\text{ cm}\right)$.

c) Vì $I$ là trung điểm của dây cung $BC$ không đi qua tâm $O$ nên $OI \perp BC$ hay $\widehat{AIO} = 90^\circ$, như vậy $I$ và $N$ cùng nhìn đoạn $AO$ dưới góc vuông nên $A, N, O, I$ cùng nằm trên một đường tròn đường kính $AO$, do đó: $\widehat{AIN} = \widehat{AON}$ (cùng chắn cung $NA$ ).

Mặt khác $\widehat{MTN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON} = \widehat{AON}$. Suy ra $\widehat{MTN} = \widehat{AIN}$ và chúng ở vị trí đồng vị nên $MT // AC$ (đpcm).

d) Xét $\Delta BOK$ vuông tại $B$ (Tính chất tiếp tuyến), có đường cao $BI$ nên $OB^2 = OI.OK$ mà

$OB = OM \Rightarrow OM^2 = OI.OK \Rightarrow \dfrac{OM}{OI} = \dfrac{OK}{OM}$

Góc $MOI$ chung nên $\Delta OIM \backsim \Delta OMK\left(c - g - c\right)$. Từ đó suy ra $\widehat{MIO} = \widehat{OMK}$ $\left(5\right)$

Ta có: $OM = ON$ nên $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$ $\left(6\right)$

Vì bốn điểm $M, N, I, O$ cùng nằm trên một đường tròn đường kính $AO$ và từ (6) nên

$\widehat{NMO} + \widehat{MIO} = \widehat{MNO} + \widehat{MIN} = 180^\circ\left(7\right)$

Từ (5) và (7), suy ra: $\widehat{NMO} + \widehat{KMO} = 180^\circ$, do đó ba điểm $M, N, K$ thẳng hàng hay suy ra $K$ luôn nằm trên đường thẳng $MN$ cố định khi $d$ thay đổi.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $a, b, c$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$, chứng minh: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge 3$

**Lời giải**

$\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \ge \dfrac{2}{ab} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) \ge \dfrac{1}{ab}$

Theo bât đẳng Cauchy ta có

$$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) \ge \dfrac{1}{ab}; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) \ge \dfrac{1}{bc}; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) \ge \dfrac{1}{ac}$$
$$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + 1\right) \ge \dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b^2} + 1\right) \ge \dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c^2} + 1\right) \ge \dfrac{1}{c}$$

Cộng lần lượt các vế

$\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) \ge \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) \ge \dfrac{c + b + a + bc + ac + ab}{abc}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 6-\frac{3}{2}=9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$ (đpcm).

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2014 - 2015**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 23/6/2014
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** 1. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x=9$

2. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với x > 0 và x khác 1

a) Chứng minh rằng $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm các giá trị của x để $2P=2\sqrt{x}+5$

**Lời giải**

1. Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức $A$ ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-1}=\dfrac{3+1}{3-1}=2$

2. $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3. $2P=2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2=2x+5\sqrt{x}\Leftrightarrow 2x+3\sqrt{x}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0\Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0$ (vì $\sqrt{x}+2>0$)

$\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (tmđk)

Vậy $x=\dfrac{1}{4}$

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

**Lời giải**

Gọi $x$ là số sản phẩm mỗi ngày xưởng làm được. $(x\in\mathbb{N},0<x<1100)$.

Số ngày mà xưởng làm xong theo kế hoạch là $\frac{1100}{x}$ (ngày).

Mỗi ngày xưởng làm vượt mức 5 sản phẩm nên số ngày mà xưởng làm xong là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày).

Vì xưởng xong sớm 2 ngày nên ta có phương trình $\frac{1100}{x+5}+2=\frac{1100}{x}$

Giải phương trình ta có $\left[\begin{array}{l} x=50\ (tm) \\ x=-55\ (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy mỗi ngày xưởng làm 50 sản phẩm.

**Câu III. (2,0 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4}{x+y}+\frac{1}{y-1}=5 \\ \frac{1}{x+y}-\frac{2}{y-1}=-1 \end{cases}$.

2. Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng $(d): y=-x+6$ và parabol $(P): y=x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của $(d)$ và $(P)$.

b) Gọi $A,B$ là hai giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tính diện tích của tam giác $AOB$.

**Lời giải**

1. Điều kiện $x+y\neq 0$ và $y\neq 1$

Đặt $X=\frac{1}{x+y}$ và $Y=\frac{1}{y-1}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4X+Y=5 \\ X-2Y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ Y=1 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} x+y=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;2)$

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ ta có $x^2=-x+6 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=2$.

Với $x=2 \Rightarrow y=4$. Giao điểm thứ nhất là $A(2;4)$.

Với $x=-3 \Rightarrow y=9$. Giao điểm thứ hai là $B(-3;9)$.

b) Gọi $C$ là giao điểm của $(d)$ với trục $Oy \Rightarrow C(0;6)$

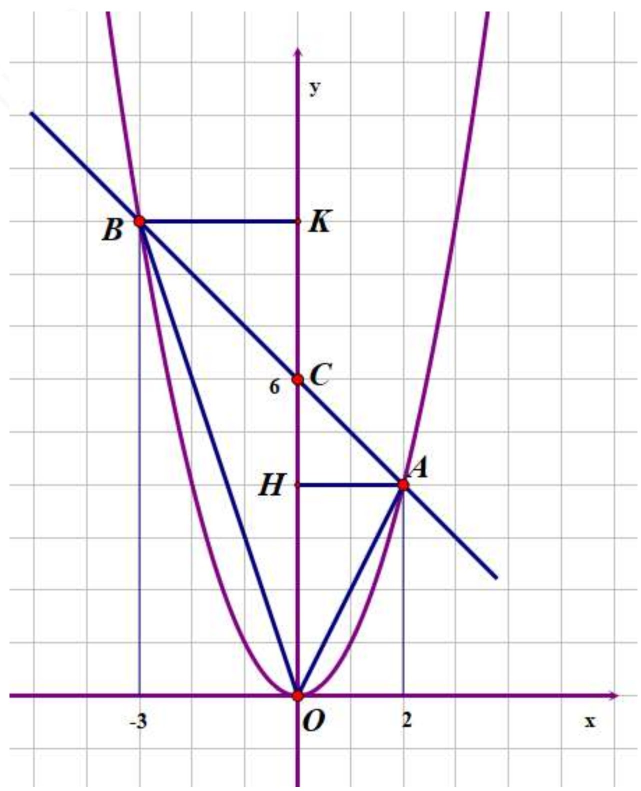
Kẻ $AH\perp Oy \Rightarrow AH=|x_A|=|2|=2$

$BK\perp Oy \Rightarrow BK=|x_B|=|-3|=3$

$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}AH.CO=\frac{1}{2}.2.6=6$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{OBC}=\frac{1}{2}BK.CO=\frac{1}{2}.3.6=9$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{OAB}=6+9=15$ (dvdt)



**Câu IV. (3,5 điểm)** . Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính $AB$ cố định. Vẽ đường kính $MN$ của đường tròn $(O;R)$($M$ khác $A$, $M$ khác $B$). Tiếp tuyến tại $B$ của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng $AM,AN$ lần lượt tại các điểm $Q,P$.

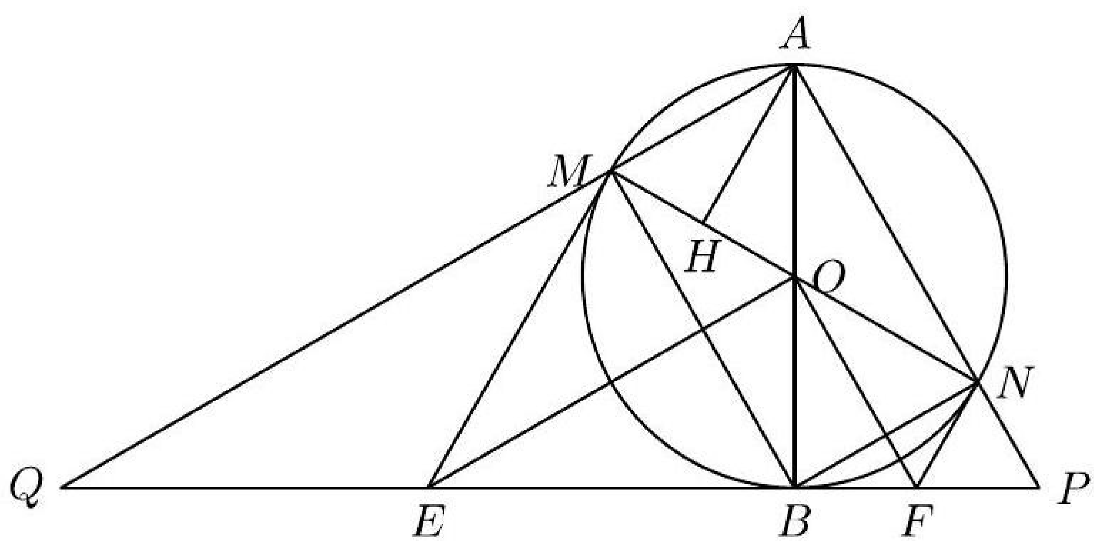
1) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh 4 điểm $M,N,P,Q$ cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi $E$ là trung điểm của $BQ$. Đường thẳng vuông góc với $OE$ tại $O$ cắt $PQ$ tại điểm $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $BP$ và $ME // NF$.

4) Khi đường kính $MN$ quay quanh tâm $O$ và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính $MN$ để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

**Lời giải**




1) Tứ giác $AMBN$ có hai đường chéo $AB,MN$ bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Do câu 1) ta có $\widehat{ANM}=\widehat{ABM}$

Hơn nữa $\widehat{ABM}=\widehat{MQP}$ (cùng phụ với $\widehat{QAB}$ )

Do đó $\widehat{ANM}=\widehat{MQP}\Rightarrow M,N,P,Q$ cùng thuộc một đường tròn.

3) Trong $\Delta ABQ$ ta có $OE$ là đường trung bình nên $OE // AQ$.

Ta lại có $OF\perp OE$ và $AP\perp AQ$ nên $OF // AP$.

Trong tam giác $ABP$ có $O$ là trung điểm $AB$ và $OF//AP$ nên $F$ là trung điểm $BP$.

Ta có $\widehat{MEF}=\frac{1}{2}($ sđ $\overset{\frown}{MAB}-$sđ$\overset{\frown}{MB})$ và $\widehat{NFE}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BAN}-\text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right)$.

Do đó $\widehat{MEF}+\widehat{NFE}=$ sđ$\overset{\frown}{MN}=180^\circ\Rightarrow ME//NF$ (góc trong cùng phía bù nhau).

4) Do $E,F$ là trung điểm của $BQ,BP$ nên $PQ=2EF\ge 2MN$.

$S_{MNPQ}=S_{APQ}-S_{AMN}$. Ta cần tìm vị trí của $M,N$ sao cho $S_{APQ}$ nhỏ nhất và $S_{AMN}$ lớn nhất. Thật vậy,

$S_{APQ}=\dfrac{AB\cdot PQ}{2}=EF\cdot AB\ge MN\cdot AB=4R^2$. Dấu bằng xảy ra khi $MN\perp AB$.

Mà ta có $S_{AMN}=\dfrac{MN\cdot AH}{2}\le\dfrac{MN\cdot OA}{2}=R^2$. Dấu bằng xảy ra khi $MN\perp AB$.

Vậy $MN\perp AB$ để $S_{MNPQ}$ nhỏ nhất.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với $a,b,c$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ca}+\sqrt{2c+ab}$.

**Lời giải**

Vì $a+b+c=2$ nên $2a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$

$\Rightarrow\sqrt{2a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\dfrac{a+b+a+c}{2}$.

Tương tự ta có $\sqrt{2b+ca}\le\dfrac{b+c+b+a}{2}$ và $\sqrt{2c+ab}\le\dfrac{c+a+c+b}{2}$.

Cộng theo vế ta có $Q\le 2(a+b+c)=4$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2015 - 2016**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 11/6/2015
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x>0, x\neq 4$.

1. Tính giá trị của biểu thức $P$ khi $x=9$
2. Rút gon biểu thức $Q$.
3. Tìm giá trị của $x$ để biểu thức $\dfrac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

1. Thay $x=9$ vào $P=\dfrac{9+3}{\sqrt{9}-2}=\dfrac{12}{\sqrt{9}-2}=\dfrac{12}{3-2}=12$.

2. $Q=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3. Ta có $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=3$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{P}{Q}$ là $2\sqrt{3}$, đạt được khi $x=3$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng $60$ km, sau đó chạy xuôi dòng $48$ km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là $2$ km/ giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

**Lời giải**

Gọi vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là $x$ (km/giờ), $x>2$.
Vận tốc của tàu khi chạy xuôi dòng là $x+2$ (km)
Vận tốc của tàu khi chạy ngược dòng là $x-2$ (km)

Thời gian tàu tuần tra ngược dòng là $\dfrac{60}{x-2}$ (giờ).

Thời gian tàu tuần tra xuôi dòng là $\dfrac{48}{x+2}$ (giờ).

Ta có phương trình $\dfrac{60}{x-2}-\dfrac{48}{x+2}=1 \Rightarrow x^2-12x-220=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=22\ (tm) \\ x=-10\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là $22$ km/ giờ.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y)+\sqrt{x+1}=4 \\ (x+y)-3\sqrt{x+1}=-5 \end{cases}$.

2. Cho phương trình $x^2-(m+5)x+3m+6=0$ ($x$ là ẩn số).

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực $m$.

b) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $5$.

**Lời giải**

1. Điều kiện xác định $x \geq -1$.

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=\sqrt{x+1}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ a-3b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2. \end{cases}$

Từ đó ta có $\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(3;-2)$.

2. $x^2-(m+5)x+3m+6=0$

a) Ta có $\Delta=(m+5)^2-4(3m+6)=(m-1)^2 \geq 0\ \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của $m$.

b) Ta tính được hai nghiệm là $x_1=3, x_2=m+2$.

Vì $x_1, x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5 nên

$$\begin{cases} x_1=3>0 \\ x_2=m+2>0 \\ x_1^2+x_2^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ 3^2+(m+2)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ (m+2)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ \left[\begin{array}{l} m+2=4 \\ m+2=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ \left[\begin{array}{l} m=2\ (tm) \\ m=-6\ (ktm) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=2$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho nửa đường tròn tâm $O$ có đường kính $AB$. Lấy điểm $C$ trên đoạn thẳng $AO$ ($C$ khác $A, C$ khác $O$). Đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$ cắt nửa đường tròn tại $K$. Gọi $M$ là điểm bất kì trên cung $KB$ ($M$ khác $K, M$ khác $B$). Đường thẳng $CK$ cắt các đường thẳng $AM$, $BM$ lần lượt tại $H$ và $D$. Đường thẳng $BH$ cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai $N$.

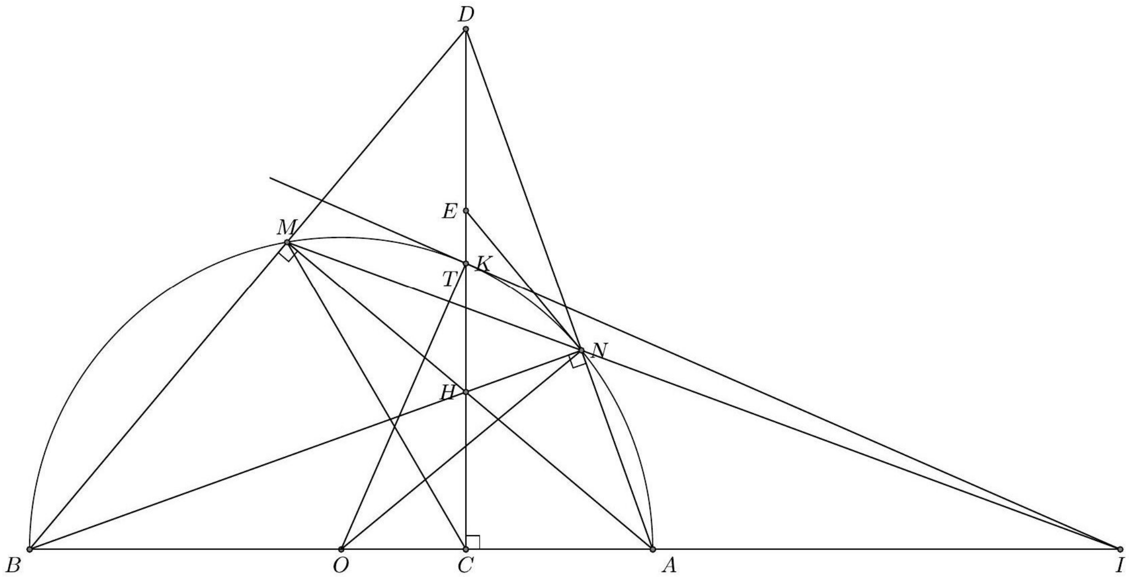
1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $CA.CB=CH.CD$.

3. Chứng minh ba điểm $A, N, D$ thẳng hàng và tiếp tuyến tại $N$ của nửa đường tròn đi qua trung điểm của $DH$.

4. Khi $M$ di động trên cung $KB$, chứng minh đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**




a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{AMD}=90^\circ$ vì góc $\widehat{AMB}$ nhìn nửa đường tròn đường kính $AB$.

$\widehat{ACD}=90^\circ$ do $DK\perp AB$.

Suy ra $\widehat{AMD}=\widehat{ACD}=90^\circ$ nên tứ giác $ACMD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AD$.

b) Chứng minh$CA\cdot CB=CH\cdot CD$.

Xét hai tam giác $\Delta CAH$ và $\Delta CDB$ ta có :

$\widehat{ACH}=\widehat{DCB}=90^\circ$

$\widehat{CAH}=\widehat{CDB}$ vì cùng phụ góc $\widehat{CBM}$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta CAH\backsim\Delta CDB$

$\Rightarrow\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{CH}{CB}\Rightarrow CA\cdot CB=CH\cdot CD$, (điều phải chứng minh).

c) Chứng minh ba điểm $A,N,D$ thẳng hàng

Ta có $H$ là trực tâm $\Delta ABD\Rightarrow AD\perp BH$.

Vì $AN\perp BH$ và $AD\perp BH$ nên $A,N,D$ thẳng hàng.

Chứng minh tiếp tuyến tại $N$ của đường tròn đi qua trung điểm của $DH$.

Gọi $E$ là giao điểm của $CK$ và tiếp tuyến tại $N$.

Ta có $BN\perp DN$ và $ON\perp EN\Rightarrow\widehat{DNE}=\widehat{BNO}$.

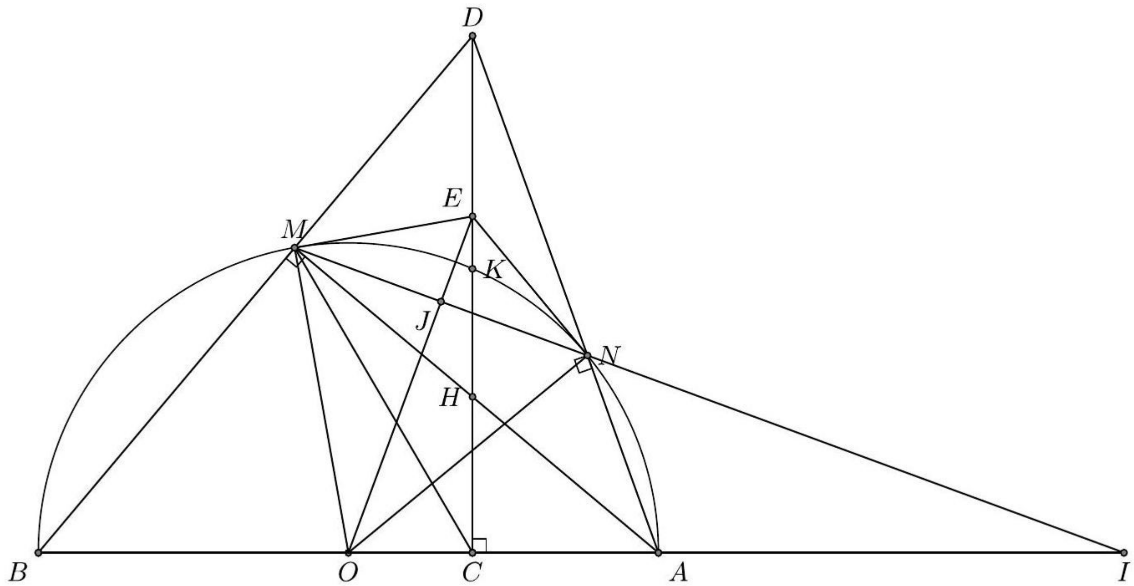
Mà $\widehat{BNO}=\widehat{OBN},\widehat{OBN}=\widehat{EDN}\Rightarrow\widehat{DNE}=\widehat{EDN}$.

$\Rightarrow\Delta DEN$ cân tại $E$, suy ra $ED=EN$.

Ta có $\widehat{ENH}=90^\circ-\widehat{END}=90^\circ-\widehat{NDH}=\widehat{EHN}$.

$\Rightarrow\Delta HEN$ cân tại $E$, suy ra $EH=EN$.

Từ (3) và (4) suy ra $E$ là trung điểm của $HD$, (điều phải chứng minh).




d) Khi $M$ di động trên cung $KB$, chứng minh đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.
Kéo dài $MN$ cắt $AB$ tại điểm $I$, ta cần chứng minh điểm $I$ cố định.

Ta xét $\Delta DMH$ vuông tại $H$ có $E$ là trung điểm cạnh huyền $DH$, suy ra $ME = EN = \frac{1}{2}DH$, xét hai tam giác $\Delta EMO$ và $\Delta ENO$ là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp C-C-C. Suy ra $\widehat{EMO} = \widehat{ENO} = 90^\circ \Rightarrow EM \perp OM$.

Suy ra tứ giác $EMON$ nội tiếp đường tròn đường kính $OE \Rightarrow OJ \cdot OE = OM^2 = R^2$.

Ta có $\Delta OJI \backsim \Delta OCE \Rightarrow \frac{OJ}{OC} = \frac{OI}{OE} \Rightarrow OI \cdot OC = OJ \cdot OE = R^2$.

Suy ra $OI = \frac{R^2}{OC}$ là số không đổi mà $O$ và đường thẳng $AB$ cố định, suy ra $I$ cố định, (điều phải chứng minh).

**Câu V. (0,5 điểm)** Với hai số thực không âm $a, b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{ab}{a+b+2}$.

**Lời giải**

Ta có $a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow 2ab = (a+b)^2 - 4 \Rightarrow 2M = \frac{(a+b)^2 - 4}{a+b+2} = a+b-2$.

Ta có $a + b \le \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)} = 2\sqrt{2} \Rightarrow M \le \sqrt{2} - 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $M$ bằng $\sqrt{2}$ khi $a = b = \sqrt{2}$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 8/6/2016
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=25$

2. Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

3. Tìm $x$ để biểu thức $P=A\cdot B$ có giá trị là số nguyên

**Lời giải**

1. Thay $x=25$ (tmdk) vào biểu thức $A$ ta có $A=\dfrac{7}{\sqrt{25}+8}=\dfrac{7}{13}$

Vậy với $x=25$ thì $A=\dfrac{7}{13}$

2. $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2\sqrt{x}-24}{x-9}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)+2\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{x+5\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+8\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$

3) Ta có $P=A\cdot B=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}\cdot\dfrac{7}{\sqrt{x}+8}=\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}>0$

$\Rightarrow P=\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{7}{P}-3\ge 0\Rightarrow\dfrac{7}{P}\ge 3\Rightarrow P\le 2\Rightarrow 0<P\le 2$ mà $\begin{cases}P\in\mathbb{Z}^+\\P>0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}P=1\\P=2\end{array}\right.$

Với $P=1\Rightarrow x=16$.

Với $P=2\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720\ m^2$. Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

**Lời giải**

Gọi chiều dài hình chư nhật là: $x\ (m)(x>0)$.

Suy ra, chiều rộng hình chữ nhật là: $\dfrac{720}{x}(\ m)$.

Chiều dài của mảnh vườn sau khi tăng 10m là $x+10\ (m)$

Chiều rộng của mảnh vườn sau khi giảm 6m là $\dfrac{720}{x}-6\ (m)$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$(x+10)\left(\frac{720}{x}-6\right)=720 \Leftrightarrow 6x^2+60x-7200=0 \Leftrightarrow x^2+10x-1200=0$

Giải phương trình này ta được: $\left[\begin{array}{l} x=30\ (tm) \\ x=-40\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 30 (m), chiều rộng hình chữ nhật là 24 (m).

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3x}{x-1}-\frac{2}{y+2}=4 \\ \frac{2x}{x-1}+\frac{1}{y+2}=5 \end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=3x+m^2-1$ và Parabol $(P): y=x^2$.

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt với mọi $m$.

b) Gọi $x_1$ và $x_2$ là hoành độ các giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tìm $m$ để $(x_1+1)(x_2+1)=1$.

**Lời giải**

1) Đặt $\begin{cases} u=\frac{x}{x-1} \\ v=\frac{1}{y+2} \end{cases}$ với $(x\neq 1, y\neq -2)$

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 3u-2v=4 \\ 2u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-1}=2 \\ \frac{1}{y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;-1)$.

2)

(a) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d)$ và parabol $(P)$ là:

$$x^2=3x+m^2-1 \Leftrightarrow x^2-3x-m^2+1=0\ (1)$$

Ta xét biệt thức $\Delta=(-3)^2-4\cdot(-m^2+1)=9+4m^2-4=4m^2+5>0$ với mọi $m$.

Vậy $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt với mọi $m$.

(b) Với $x_1, x_2$ là hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ nên $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=1-m^2 \end{cases}$

Để $(x_1+1)(x_2+1)=1 \Leftrightarrow x_1\cdot x_2+x_1+x_2=1 \Leftrightarrow 1-m^2+3+1=1 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ và một điểm $A$ nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến $AB$ với đường tròn $(O)$ ( $B$ là tiếp điểm) và đường kinh $BC$. Trên đoạn thẳng $CO$ lấy điểm $I$ ( $I$ khác $C$, $I$ khác $O$ ). Đường thẳng $AI$ cắt $(O)$ tại hai điểm $D$ và $E$( $D$ nằm giữa $A$ và $E$). Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $DE$.

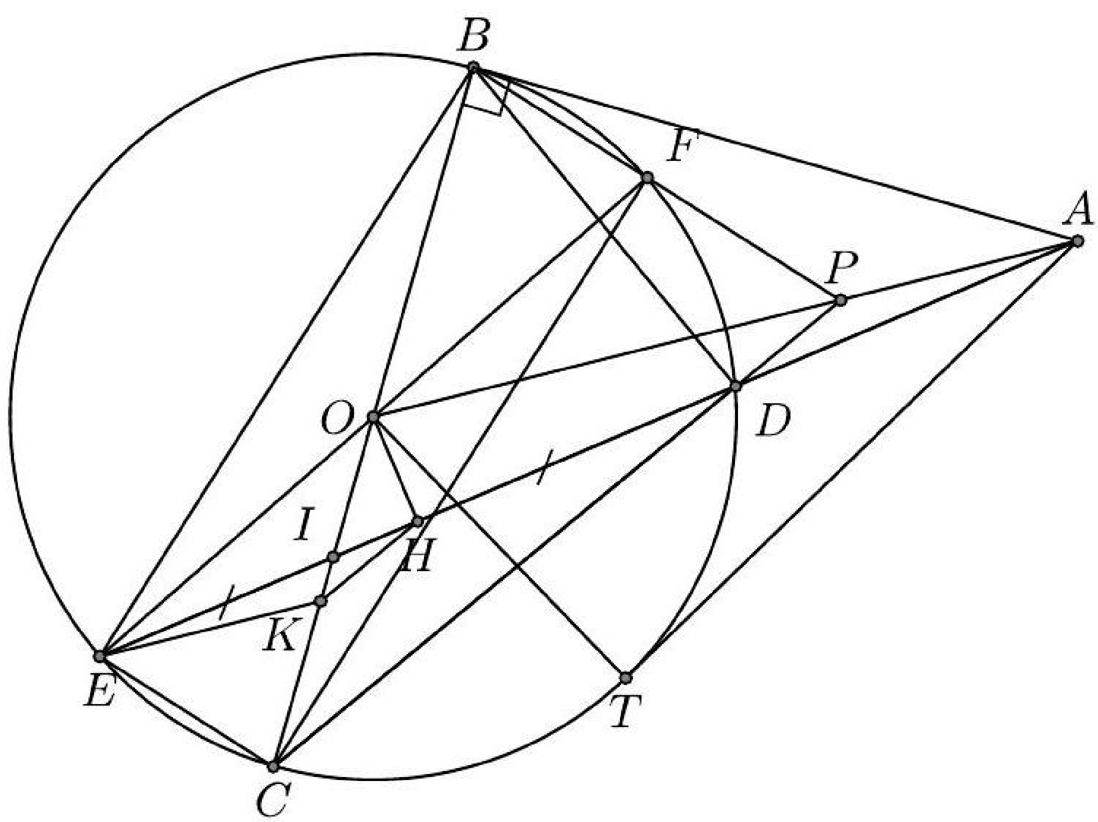
1. Chứng minh bốn điểm $A,B,O,H$ cùng nằm trên một đường tròn

2. Chứng minh $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{BE}$.

3. Đường thẳng $d$ đi qua điểm $E$ song song với $AO$, $d$ cắt $BC$ tại điểm $K$. Chứng minh $HK // DC$.

4. Tia $CD$ cắt $AO$ tại điểm $P$, tia $EO$ cắt $BP$ tại điểm $F$. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

**Lời giải**




a) Vì $AB$ là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OA \perp AB \Rightarrow \widehat{OBA}=90^\circ$.

Vì $DE$ là dây cung của $(O)$ mà $H$ là trung điểm của $DE$ nên $OH \perp DE \Rightarrow \widehat{OHA}=90^\circ$.

Xét tứ giác $ABOH$ có $\widehat{OHA}+\widehat{OBA}=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABOH$ nội tiếp.

b) Vì $AB$ là tiếp tuyến của $(O)$ tại $B \Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{BED}=\widehat{BEA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $BD$ )

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có $\widehat{ABD}=\widehat{BEA}$ và $\widehat{BAD}$ chung

$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle AEB(g-g) \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{BE}$.

c) Vì tứ giác $ABOH$ nội tiếp nên $\widehat{HAO}=\widehat{HBO}$ (hai góc cùng chắn một cung)

Mà $EK//AO\Rightarrow \widehat{KEA}=\widehat{HAO}$ (hai góc so le trong)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow \widehat{KEH}=\widehat{KBH}$.

$\Rightarrow$ tứ giác $HKEB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHK}=\widehat{KBE}$

Vì tứ giác $DCEB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{CBE}$ (hai góc cùng chắn cung $CE$ )

Từ (3) và (4) ta có $\widehat{CDE}=\widehat{KHE}$ mà hai góc nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow HK//DC$.

d) Kẻ tiếp tuyến thứ hai với $AT$ với $(O)(T\in(O))$.

$\Rightarrow OT\perp TA\Rightarrow \widehat{OTA}=90^\circ$.

Xét tứ giác $OTAB$ có $\widehat{OTA}+\widehat{OBA}=180^\circ$ mà hai góc đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $OTAB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OAT}=\widehat{OBT}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $OT$ )

Mà trên $(O)$ có $\widehat{OBT}=\widehat{CBT}=\widehat{CDT}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $CT$ )

$\Rightarrow \widehat{OAT}=\widehat{CDT}$ hay $\widehat{PAT}=\widehat{CDT}\Rightarrow \widehat{PAT}+\widehat{PDT}=180^\circ$.

Mà hai góc ở vị trí đối nhau trong tứ giác $TAPD\Rightarrow TAPD$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ATP}=\widehat{ADP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $AP$ )

Trên $(O)$ có $\widehat{EBC}=\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $CE$ )

Mà $\widehat{ADP}=\widehat{EDC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ATP}=\widehat{CBE}$ (1).

Có $AT,AB$ là tiếp tuyến của $(O)\Rightarrow AO$ là tia phân giác của góc $\widehat{TAB}\Rightarrow \widehat{TAP}=\widehat{BAP}$

Xét $\Delta TAP$ và $\Delta BAP$ có $AT=AB,\widehat{TAP}=\widehat{BAP}$ (cmt) và $AP$ chung

$\Rightarrow \Delta TAP=\Delta BAP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ATP}=\widehat{ABP}(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow \widehat{ABP}=\widehat{EBC}$

$\Rightarrow \widehat{EBP}=\widehat{EBC}+\widehat{CBP}=\widehat{ABP}+\widehat{CBP}=\widehat{CBA}=90^\circ\Rightarrow \widehat{EBF}=90^\circ$

Mà $EF$ qua $O$ nên $EF$ là đường kính của $(O)\Rightarrow BFCE$ có hai đường chéo $EF$ và $BC$ bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $BFCE$ là hình chữ nhật.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với các số thực $x,y$ thoả mãn $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

**Lời giải**

Bổ đề $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)},\forall a,b\ge 0$.

Thật vậy bổ đề tương đương với $2\sqrt{ab}\le a+b$ (đúng theo bất đẳng thức cô-si)

Áp dụng ta có $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y\Leftrightarrow x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}\le\sqrt{2(x+y+12)}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2\le 2(x+y)+24\Leftrightarrow -4\le x+y\le 6$ (1)

Dễ thấy $x+y\ge 0\left(2\right)$

Ta có $x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}\Leftrightarrow (x+y)^2=\left(x+y\right)+12+2\sqrt{\left(x+6\right)\left(y+6\right)}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-\left(x+y\right)-12=2\sqrt{\left(x+6\right)\left(y+6\right)}\ge 0\Leftrightarrow \left(x+y+3\right)\left(x+y-4\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\le 3 \\ x+y\ge 4 \end{array}\right.\Leftrightarrow x+y\ge 4\left(3\right)$

Từ (1),(2) và (3) suy ra $4\le x+y\le 6$.

Dấu " =" xảy ra khi $x+y=4\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \left[\begin{array}{l} x+6=0 \\ y+6=0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-6 \\ y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x=10 \\ y=-6 \end{cases} \end{array}\right.$

Khi $x+y=6\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x+6=y+6 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x+y$ là 6 khi $x=y=3$ và giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là 4 khi $\left(x;y\right)=\left(-6;10\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(10;-6\right)$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2017 - 2018**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 9/6/2017
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\ge 0,x\ne 25$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$

2. Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để $A=B\cdot\left|x-4\right|$.

**Lời giải**

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức $A$ ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-5}=\dfrac{3+2}{3-5}=-\dfrac{5}{2}$

Vậy với $x=9$ thì $A=-\dfrac{5}{2}$

2) $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-15}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}-5\right)+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$

3) $A=B.\left|x-4\right|\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}\cdot\left|x-4\right|$

Nếu $x\ge 4,x\ne 25$ thì $(*)$ trở thành: $\sqrt{x}+2=x-4\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$

Do $\sqrt{x}+2>0$ nên $\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Nếu $0\le x<4$ thì $(*)$ trở thành: $\sqrt{x}+2=4-x\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$

Do $\sqrt{x}+2>0$ nên $\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy có hai giá trị $x=1$ và $x=9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ $A$ để đi đến $B$ với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường $AB$ dài 120 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên xe ô tô đến $B$ sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

**Lời giải**

Gọi vận tốc xe máy là $x\left(\text{ km/h}\right)$. Điều kiện $x>0$

Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên vận tốc ô tô là $x+10\left(\text{ km/h}\right)$.

Thời gian xe máy đi từ $A$ đến $B$ là $\frac{120}{x}(\text{ h})$

Thời gian ô tô đi từ $A$ đến $B$ là $\frac{120}{x+10}(\text{ h})$

Xe ô tô đến $B$ sớm hơn xe máy 36 phút $=\frac{3}{5}(\text{ h})$ nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow 120\cdot 5\cdot(x+10)-120\cdot 5\cdot x=3x\cdot(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+30x-6000=0 \Leftrightarrow (x+50)(x-40)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-50\ (ktm) \\ x=40\ \ (tm)\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của xe máy là $40(\text{ km/h})$, vận tốc của ô tô là $50(\text{ km/h})$.

**Câu III. (2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5 \\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=mx+5$.

a) Chứng minh đường thẳng $(d)$ luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của $m$.

b) Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1, x_2$ (với $x_1<x_2$ ) sao cho $|x_1|>|x_2|$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x\geq 0; y\geq 1$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x} \\ b=\sqrt{u-1}\end{cases}$ $(a,b\geq 0)$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}a+2b=5 \\ 4a-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5-2b \\ 4(5-2b)-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5-2b \\ 20-8b-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5-2b \\ -9b=-18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1 \\ b=2\end{cases}$$

Do đó $\begin{cases}\sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y-1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \\ y-1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \\ y=5\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;5)$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=mx+5$.

a) Chứng minh đường thẳng $(d)$ luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của $m$.

Thay tọa độ điểm $A(0;5)$ vào phương trình đường thẳng $(d): y=mx+5$ ta được:

$5=m\cdot 0+5$ luôn đúng với mọi giá trị của tham số $m$ nên đường thẳng $(d)$ luôn đi qua điểm $A$ với mọi giá trị của $m$.

b) Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1, x_2$ (với $x_1 < x_2$ ) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ : $x^2 = mx + 5 \Leftrightarrow x^2 - mx - 5 = 0.$

Ta có tích hệ số $ac = -5 < 0$ nên phương trình hoành độ giao điểm luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m$ hay thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm phân biệt với mọi $m$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -5 \end{cases}$

Ta có $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 > 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$

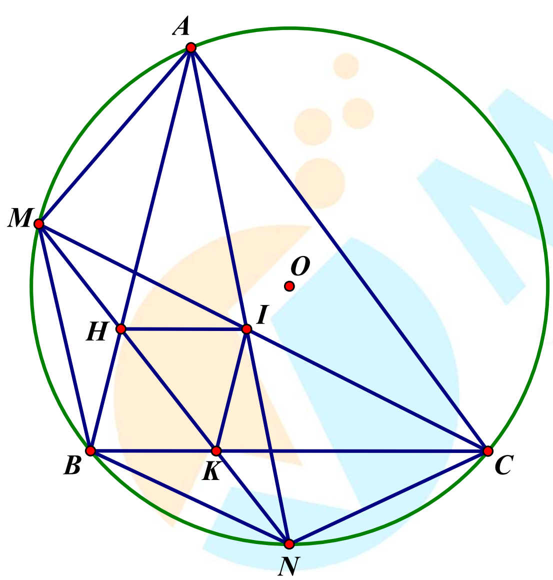
Theo giả thiết: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$ do đó $x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ ngoại tiếp tam giác nhọn $ABC$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $AB$ và cung nhỏ $BC$. Hai dây $AN$ và $CM$ cắt nhau tại điểm $I$. Dây $MN$ cắt các cạnh $AB$ và $BC$ lần lượt tại các điểm $H$ và $K$.

1. Chứng minh bốn điểm $C, N, K, I$ cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK.NM$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi $P, Q$ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $MBK$, tam giác $MCK$ và $E$ là trung điểm của đoạn $PQ$. Vẽ đường kính $ND$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh ba điểm $D, E, K$ thẳng hàng.

**Lời giải**




1. Chứng minh bốn điểm $C, N, K, I$ cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $M$ là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM} \Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MCB}$

$\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{ICK}$. Tứ giác $CNKI$ có $C$ và $N$ là 2 dỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh $KI$ dưới góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp ( dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

Do đó bốn điểm $C, N, K, I$ cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.NM$.

Ta có $N$ là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CN} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn cùng chắn cung $CN$ )

$\widehat{CBN} = \widehat{BMN}$ ( $= \widehat{CMN}$ ) $\Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{BMN}$

Xét $\Delta KBN$ và $\Delta BMN$ có :

$\widehat{N}$ chung ; $\widehat{KBN} = \widehat{BMN}$

$\Rightarrow \Delta KBN \backsim \Delta BMN \Rightarrow \dfrac{KN}{BN} = \dfrac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ ( điều phải chứng minh).

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $AC$)

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $IC$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}$ Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $HB // IK$ (1)

- Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp

$\widehat{ANC} = \widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $AI$)

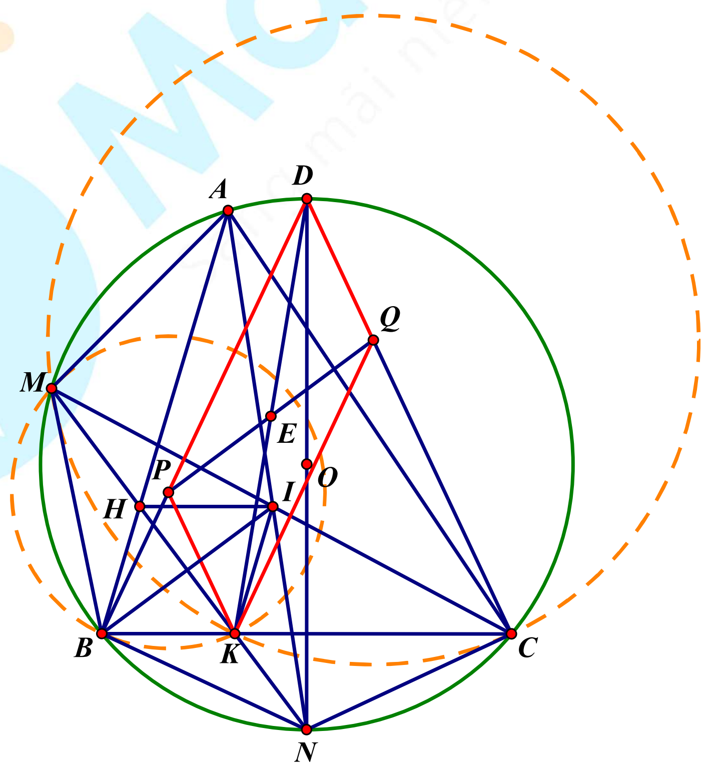
Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $AC$ )

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHI}$ Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $BK // HI$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.

Mặt khác $AN, CM$ lần lượt là các tia phân giác của các góc $A$ và $C$ trong tam giác $ABC$ nên $I$ là giao điểm 3 đường phân giác, do đó $BI$ là tia phân giác góc B

Vậy tứ giác BHIK là hình thoi ( dấu hiệu nhận biết hình thoi).



4. Gọi $P,Q$ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $MBK$, tam giác $MCK$ và $E$ là trung điểm của đoạn $PQ$. Vẽ đường kính $ND$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh ba điểm $D,E,K$ thẳng hàng.

Vì $N$ là điểm chính giữa cung nhỏ $BC$ nên $DN$ là trung trực của $BC$ nên $DN$ là phân giác $\widehat{BDC}$

Ta có $\widehat{KQC}=2\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm trong dường tròn $Q$ )

$\widehat{NDC}=\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $NC$ )

Mà $\widehat{BDC}=2\widehat{NDC}\Rightarrow\widehat{KQC}=\widehat{BDC}$

Xét tam giác $\Delta BDC$ và $\Delta KQC$ là các các tam giác cân tại $D$ và $Q$ có hai góc ở đáy bằng nhau

$\Rightarrow\widehat{BCD}=\widehat{BCQ}$ do vậy $D,Q,C$ thẳng hàng nên $KQ//PD$

Chứng minh tương tự ta có ta có $D,P,B$ thẳng hàng và $DQ//PK$

Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên $E$ là trung điểm của $PQ$ cũng là trung điểm của $DK$. Vậy $D,E,K$ thẳng hàng (điều phải chứng minh).

**Câu V. (0,5 điểm)** Cho các số thực $a,b,c$ thay đổi luôn thỏa mãn: $a\ge1,b\ge1,c\ge1$ và $ab+bc+ca=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:

$a^2+b^2\ge2ab,b^2+c^2\ge2bc,c^2+a^2\ge2ca$.

Do đó: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge2\left(ab+bc+ca\right)=2.9=18\Rightarrow2P\ge18\Rightarrow P\ge9$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Vậy $MinP=9$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$

Vì $a\ge1,b\ge1,c\ge1$ nên $(a-1)(b-1)\ge0\Leftrightarrow ab-a-b+1\ge0\Leftrightarrow ab+1\ge a+b$

Tương tự ta có $bc+1\ge b+c,ca+1\ge c+a$

Do đó $ab+bc+ca+3\ge2(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c\le\dfrac{9+3}{2}=6$

Mà $P=a^2+b^2+c^2=a+b+c^2-2ab+bc+ca=a+b+c^2-18$

$\Rightarrow P\le36-18=18$. Dấu bằng xảy ra khi : $\begin{cases}a=4;b=c=1\\b=4;a=c=1\\c=4;a=b=1\end{cases}$

---------------------------------- HẾT ----------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2018 - 2019**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 7/6/2018
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$

2. Chứng minh $B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để $\frac{A}{B}\ge\frac{x}{4}+5$.

**Lời giải**

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức $A$ ta có $A=\frac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-1}=\frac{3+4}{3-1}=\frac{7}{2}$

Vậy với $x=9$ thì $A=\frac{7}{2}$

2) $B=\frac{3\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}=\frac{3\sqrt{x}+1-2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

3) Với $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$\Rightarrow\frac{A}{B}=\sqrt{x}+4$ vậy $\Rightarrow\frac{A}{B}\ge\frac{x}{4}+5\Leftrightarrow\sqrt{x}+4\ge\frac{x}{4}+5\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4\le 0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2)^2\le 0\Leftrightarrow x=4$.

**Câu II. (2,0 điểm)** Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 28 mét, độ dài đường chéo bằng 10 mét .Tính chiều dài chiều rộng của mảnh đất đó theo mét.

**Lời giải**

Gọi chiều dài , chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là $x\left(m\right),y\left(m\right)$ với $10>x>y>0$.

Chu vi hình chữ nhật 28 mét $\Rightarrow 2\left(x+y\right)=28\Rightarrow x+y=14$

Độ dài đường chéo hình chữ nhật là 10 mét $\Rightarrow x^2+y^2=100$

Từ $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow x,y$ là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}x+y=14\\ x^2+y^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=14-y\\ x^2+y^2=100\end{cases}$

Lấy (3) thay vào $\left(4\right)\Rightarrow(14-y)^2+y^2=100\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=8\\ y=6\end{array}\right.$

Với $y=8\Rightarrow x=6$ (không thỏa mãn)

Với $y=6\Rightarrow x=8$ (thỏa mãn).

Vậy chiều dài của mảnh đất là 8m, chiều rộng của mảnh đất là 6m.

**Câu III. (2,0 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=(m+2)x+3$, $(P): y=x^2$

a) Chứng minh $(d)$ và $(P)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt .

b) Tìm tất cả các giá trị $m$ để $(d)$ và $(P)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên .

**Lời giải**

1. $\begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2|y+2|=6 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=9 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+2|y+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ |y+2|=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y+2=1 \\ y+2=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) \in \{(1;-1),(1;-3)\}$.

2. $(d): y=(m+2)x+3$ và $(P): y=x^2$

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

Hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ là nghiệm của phương trình

$$x^2=(m+2)x+3 \Leftrightarrow x^2-(m+2)x-3=0$$

Ta có $a=1\neq 0$.

Xét $\Delta=(m+2)^2+4.3=(m+2)^2+12>0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$. Vì $(m+2)^2\geq 0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nên đường thẳng $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Theo định lí vi-ét $\begin{cases} x_1+x_2=m+2 \\ x_1\cdot x_2=-3 \end{cases}$. Để $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ mà $x_1\cdot x_2=-3$. Vì 3 là số nguyên tố nến

$x_1x_2=-3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{cases}$.

Suy ra $x_1+x_2=-2 \Leftrightarrow m+2=-2 \Leftrightarrow m=-4$.

Hoặc $x_1+x_2=2 \Rightarrow m+2=2 \Rightarrow m=0$

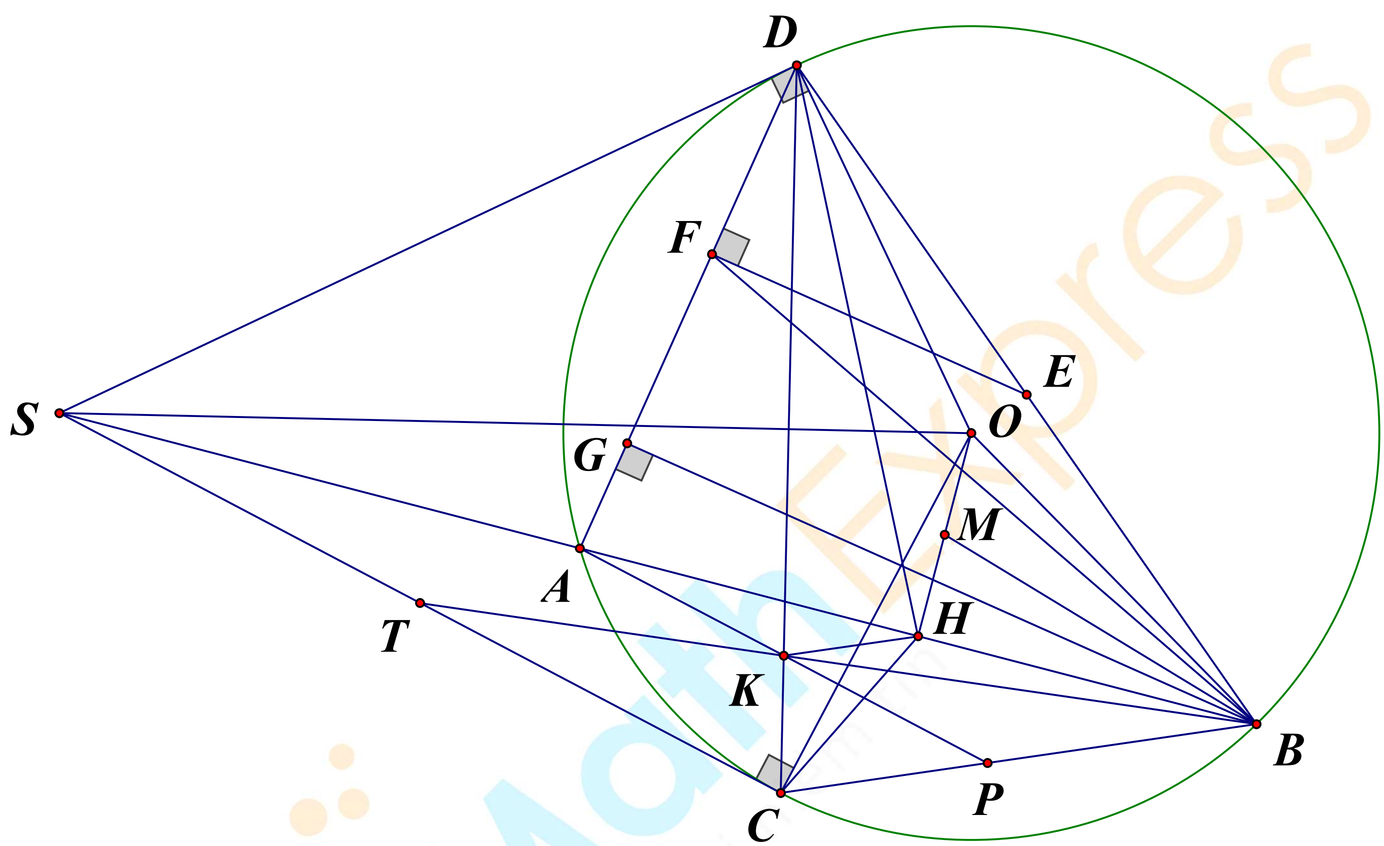
Vậy $m=-4$ hoặc $m=0$ thì $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên.

**Câu IV. (3,5 điểm)** Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung $AB$ không đi qua tâm. Lấy $S$ là một điểm bất kì trên tia đối của tia $AB$ ( $S$ khác $A$ ). Từ điểm $S$ vẽ hai tiếp tuyến $SC,CD$ với đường tròn $(O;R)$ sao cho điểm $C$ nằm trên cung nhỏ $AB$ $(C,D$ là các tiếp điểm). Gọi $H$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$

1. Chứng minh năm điểm $C,D,H,O,S$ thuộc đường tròn đường kính $SO$.

2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng $SD$ theo $R$ và tính số đo góc $SCD$.
3. Đường thẳng đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $SC$, cắt đoạn thẳng $CD$ tại $K$. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng $BK$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $SC$.
4. Gọi $E$ là trung điểm của đường thẳng $BD$ và $F$ là hình chiếu vuông góc của điểm $E$ trên đường thẳng $AD$. Chứng minh rằng, khi điểm $S$ thay đổi trên tia đối của tia $AB$ thì điểm $F$ luôn thuộc một đường tròn cố định.

**Lời giải**




1. Chứng minh năm điểm $C, D, H, O, S$ thuộc đường tròn đường kính $SO$.

Xét đường tròn $(O;R)$ có:

$SC \perp OC$ ( $SC$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ $\Rightarrow \widehat{SCO} = 90^\circ$

$SD \perp OD$ ( $SD$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ $\Rightarrow \widehat{SDO} = 90^\circ$

$H$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow OH \perp AB$ (Tính chất đường kính đi qua trung điểm của dây cung) $\Rightarrow \widehat{SHO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $SCOD$ có: $\widehat{SCO} + \widehat{SDO} = 180^\circ$ (cmt)

Mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow SCOD$ là tứ giác nội tiếp

Có $\Delta SCO$ và $\Delta SDO$ vuông tại $C$ và $D$, có $SO$ là cạnh huyền chung

$\Rightarrow$ tứ giác $SCOD$ thuộc đường tròn đường kính $SO$. (1)

Xét tứ giác $SCHO$ có: $\widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90^\circ$

Mà hai đỉnh $S$ và $H$ kề nhau cùng nhìn cạnh $SO$ dưới một góc bằng nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $SCHO$ thuộc đường tròn đường kính $SO$.

2. Từ $(1),(2) \Rightarrow$ năm điểm $C, D, H, O, S$ thuộc đường tròn đường kính $SO$.

Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng $SD$ theo $R$ và tính số đo góc $SCD$.

Xét $\Delta SDO$ vuông tại $D$ :

Có: $SO^2 = SD^2 + OD^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - OD^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow SD = \sqrt{3}R$

Ta lại có: $\widehat{OSD} = 30°$

Chứng minh tương tự ta có: $SD = R\sqrt{3}$ ; $\widehat{OSC} = 30°$.

Xét $\Delta SCD$ có: $SC = SD \Rightarrow \Delta SCD$ cân

Mà $\widehat{CSD} = \widehat{OCS} + \widehat{ODS} = 60° \Rightarrow \Delta SCD$ đều $\Rightarrow \widehat{SCD} = 60°$.

3. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng $BK$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $SC$.

- Có tứ giác $DOHC$ là tứ giác nội tiếp (Cmt) $\Rightarrow \widehat{KDH} = \widehat{COH} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CH}$

Do: $\left.\begin{array}{l} AK \perp OC\,(AK // SC) \\ OH \perp AH\,(gt) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{COH}$

Từ (1),(2) tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp

Gọi: $\begin{cases} BK \cap SC = \{T\} \\ AK \cap BC = \{P\} \end{cases}$

Ta có: $DAKH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{DAC}$

Mà: $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AHK = BAC$

$\Rightarrow HK // BC$ (2 góc đồng vị)

Xét $\Delta ABP$ có $K$ là trung điểm của $AP$

$\Rightarrow \frac{AK}{ST} = \frac{HK}{TD} \Rightarrow T$ là trung điểm của đoạn thẳng $SC$ (đpcm)

4. Ta có $OA = OB$ nên $\Delta OAB$ cân đỉnh $O$.

Có $OH$ là trung tuyến, đồng thời là phân giác của $\Delta OAB$ nên $\widehat{BOH} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

Hay $\widehat{BOH} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$.

Ta có $\widehat{BDA} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp chắn cung $AB$ ).

Suy ra $\widehat{BOH} = \widehat{BDA}$ hay $\widehat{BOH} = \widehat{EDF}$.

Xét $\Delta OHB$ và $\Delta DFE$ có:

$\widehat{OHB} = \widehat{DFE} = 90°$ ; $\widehat{BOH} = \widehat{EDF}$ (chứng minh trên).

Suy ra $\Delta OHB \backsim \Delta DFE$ (góc - góc).

Nên ta có: $\frac{OH}{HB}=\frac{DF}{FE}$

Gọi $G$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên $AD$, suy ra $BG\perp AD$.

Khi đó, $\Delta BDG$ có $FE//BG$ (cùng vuông góc với $AD$ ) nên $\frac{DF}{DG}=\frac{FE}{BG}=\frac{DE}{DB}=\frac{1}{2}$.

Suy ra $F$ là trung điểm của $DG$ và $\frac{DF}{FE}=\frac{DG}{BG}$

Gọi $M$ là trung điểm của OH.

Từ (1) và (2), ta có $\frac{OH}{HB}=\frac{DG}{BG}$ hay $\frac{2\cdot MH}{HB}=\frac{2\cdot FG}{BG}\Leftrightarrow\frac{MH}{HB}=\frac{FG}{BG}$.

Xét $\Delta BHM$ và $\Delta BGF$ có:

$\widehat{BHM}=\widehat{BGF}=90^\circ$.

$\frac{MH}{HB}=\frac{FG}{BG}$ (chứng minh trên).

Suy ra $\Delta BHM\backsim\Delta BGF$ (cạnh - góc - cạnh).

Do đó, ta có: $\widehat{GFB}=\widehat{HMB}$ (các góc tương ứng).

Hay $\widehat{AFB}=\widehat{HMB}$

Xét đường tròn $(O)$ có $A,B,O,H$ là các điểm cố định.

Có $M$ là trung điểm của $OH$ nên $M$ cố định.

Suy ra $\widehat{BMH}=\alpha$ không đổi.

Nên từ (3), suy ra $\widehat{AFB}$ có số đo không đổi, hay điểm $F$ luôn nhìn đoạn $AB$ dưới góc không đổi $\alpha$.
Vậy điểm $F$ nằm trên cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn $AB$.
Do đó, khi điểm $S$ di động trên tia đối của tia $AB$ thì điểm $F$ luôn nằm trên đường tròn cố định là cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn $AB$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}$.

**Lời giải**

**Cách 1:** Điều kiện: $0\le x\le 1$

Đặt $A=\sqrt{1-x}+\sqrt{x};B=\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$

Ta có $A^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\ge 1\forall 0\le x\le 1\Rightarrow A\ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=0$

$B^2=1+2x+2\sqrt{x(1+x)}\ge 1\forall 0\le x\le 1\Rightarrow B\ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=0$

Do đó $P=A+B\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi $x=0$

Vậy GTNN của $P$ là 2 đạt được khi và chỉ khi $x=0$.

**Cách 2:**

Điều kiện: $0\le x\le 1$

Đặt $a=\sqrt{1-x},b=\sqrt{1+x}$. Vì $0\le x\le 1$ nên ta có $b\ge a\ge 0$ và $a^2+b^2=2$

Ta có $b^2 - a^2 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{2(b^2 - a^2)} = 2\sqrt{x}$

Khi đó $P = a + b + \sqrt{2(b^2 - a^2)} \geq 2a + \sqrt{2(b^2 - a^2)}$

Suy ra $P^2 \geq 4a^2 + 2(b^2 - a^2) + 4a\sqrt{2(b^2 - a^2)} = 2(a^2 + b^2) + 4a\sqrt{2(b^2 - a^2)}$

Vì $2(a^2 + b^2) = 4$ và $4a\sqrt{2(b^2 - a^2)} \geq 0$ với mọi $0 \leq a \leq b$

Nên $P^2 \geq 4 \Rightarrow P \geq 2$( do $P > 0$)
Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi $b = a$ tức là $x = 0$.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2019 - 2020**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 2/6/2019
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0; x\ne 25$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$
2. Rút gọn biểu thức $B$.
3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $x$ để biểu thức $P=A\cdot B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

**Lời giải**

1. Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức $A$ ta có : $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}=\dfrac{4\left(\sqrt{9}+1\right)}{25-9}=\dfrac{4\cdot(3+1)}{16}=1$.

Vậy với $x=9$ thì $A=1$.

2. $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}=\left[\dfrac{15-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right]:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$

$=\dfrac{15-\sqrt{x}+2\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

3. $P=A\cdot B=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{4}{25-x}$

Để $P$ nhận giá trị nguyên khi $x\in \mathbf{Z}$ thì $4:(25-x)$ hay $25-x\in U_{(4)}=\{-4;-2;-1;1;2;4\}$.

Khi đó, ta có bảng giá trị sau:

| $25-x$ | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 29 | 27 | 26 | 24 | 23 | 21 |
| $P=A.B$ | -1 | -2 | -4 | 4 | 2 | 1 |
| Đánh giá | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn |

Do $P$ đạt giá trị nguyên lớn nhất nên ta có $P=4$. Khi đó giá trị cần tìm của $x$ là $x=24$.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được $25\%$ công việc. Hỏi mỗi đội làm riêng thì bao nhiêu ngày mới hoàn thành xong công việc trên?

2. Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao $1,75m$ và diện tích đáy là $0,32m^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước)

**Lời giải**

Gọi thời gian để đội thứ nhất và đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc lần lượt là $x$ và $y$ $(x > 15, y > 15)$, đơn vị (ngày).

Một ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Một ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Vì hai đội cùng làm trong 15 ngày thì hoàn thành xong công việc. Như vậy trong một ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{15}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$

Ba ngày đội đội thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc).

Năm ngày đội thứ hai làm được $\frac{5}{y}$ (công việc).

Vì đội thứ nhất làm trong 3 ngày rồi dừng lại đội thứ hai làm tiếp trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành xong $25\% = \frac{1}{4}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases}$.(TMĐK).

Vậy thời gian để đội thứ nhất làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 24 (ngày) và thời gian để đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 40 (ngày).

2. Số mét khối nước đựng được của bồn chính là thể tích của bồn chứa. Như vậy số mét khối đựng được của bồn sẽ là : $V = 0,32 \cdot 1,75 = 0,56 \ (m^3)$.

### Câu III. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ thỏa mãn

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-2}{x_1x_2}+1$.

**Lời giải**

1. **Cách 1 :**

Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)\,(*)$

*Phương trình (1) trở thành : $t^2-7t-18=0\,(2)$

Ta có : $\Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot(-18)=121=11^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=11$

Suy ra :Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:

$t_1=\frac{7+11}{2}=9\,(t/m)$ và $t_2=\frac{7-11}{2}=-2\,(ktm)$

Thay $t=9$ vào $(*)$ ta có : $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\pm 3$

**Cách 2 :**

Ta có : $x^4-7x^2-18=0$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2-9x^2-18=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+2)-9(x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)(x^2-9)=0$

Vì $x^2+2>0 \Rightarrow x^2-9=0$

$\Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\pm 3$

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho đường thẳng $(d): y=2mx-m^2+1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2mx+m^2-1$ (1)

Để $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với $\forall m$

Ta có : $\begin{cases} a=1\ne 0 \\ \Delta'=(b')^2-ac>0\ \forall m \end{cases}$

Xét $\Delta'=m^2-(m^2-1)=m^2-m^2+1=1>0, \forall m$

Vậy $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-2}{x_1x_2}+1\ (2)$$

Ta có $x_1x_2 \neq 0 \Rightarrow m^2-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 1$

Hai nghiệm của phương trình : $x_1 = m-1; x_2 = m+1$

Biến đổi biểu thức (2) ta có : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-2}{x_1x_2}+1 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-2+x_1x_2}{x_1x_2} \Rightarrow x_1+x_2=-2+x_1x_2$

Thay $x_1 = m-1; x_2 = m+1$ vào biểu thức $x_1+x_2=-2+x_1x_2$ ta có :

$m-1+m+1=-2+(m-1)(m+1) \Rightarrow m^2-1-2=2m$

$\Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow (m-3)(m+1)=0$

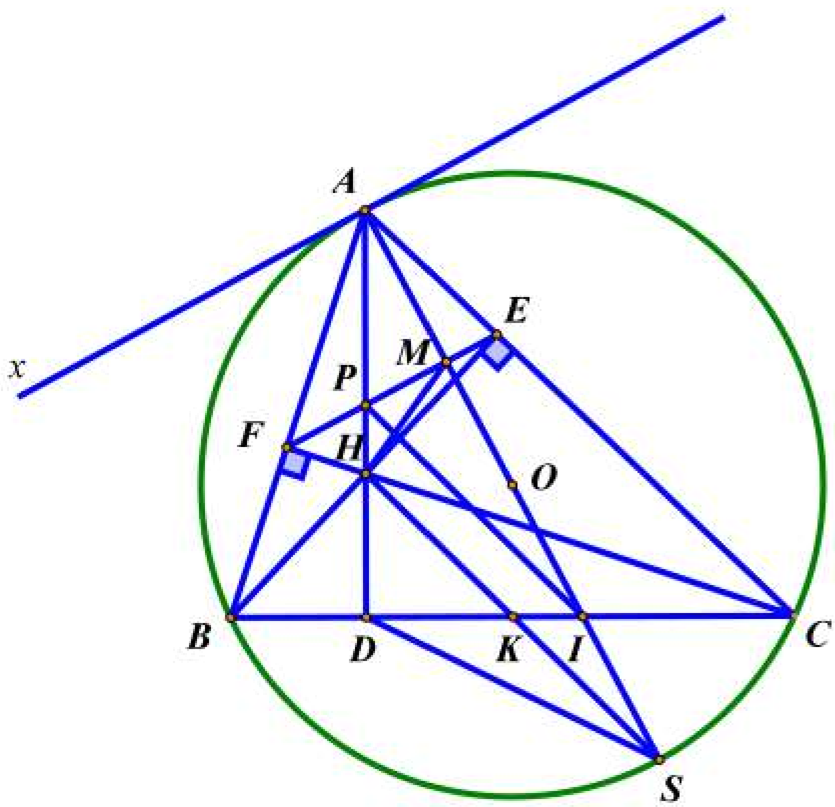
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3=0 \\ m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-1(L) \end{array}\right.$

Kết Luận : Với $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Hai đường cao $BE$ và $CF$ của tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $H$.

1. Chứng minh bốn điểm $B, C, E, F$ cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.
3. Gọi $K$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Đường thẳng $AO$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $I$, đường thẳng $EF$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm $P$. Chứng minh tam giác $APE$ đồng dạng với tam giác $AIB$ và đường thẳng $KH$ song song với đường thẳng $IP$.

**Lời giải**



1. Chứng minh bốn điểm $B,C,E,F$ cùng thuộc một đường tròn.
Xét tứ giác $BCEF$ ta có :

$\widehat{BEC}=90^\circ$($BE$ là đường cao)

$\widehat{BFC}=90^\circ$ ( $CF$ là đường cao)

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp (đỉnh $E,F$ cùng nhìn cạnh $BC$ dưới một góc vuông).
2. Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.

Vẽ tiếp tuyến $Ax$ như hình vẽ $\Rightarrow \widehat{BAF}=\widehat{ACB}$ (tính chất giữa đường tiếp tuyến và dây cung).

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ACB}$.

Ta suy ra $\widehat{BAF}=\widehat{AFE}\Rightarrow EF//Ax$ (do hai góc so le trong)

Lại có $Ax\perp OA\Rightarrow OA\perp EF$ (đpcm).
3. Chứng minh $\Delta APE \backsim \Delta ABI$

Ta có : $\widehat{AEB}=\widehat{ABI}$ ( Vì $\widehat{AEB}+\widehat{EFC}=\widehat{ABI}+\widehat{EFC}=180^\circ$ )

Mặt khác $\widehat{APE}+\widehat{PAI}=90^\circ$ (vì $AI\perp PE$ )

$\widehat{AIB}+\widehat{PAI}=90^\circ\left(\text{ Vì } AH\perp BC\right)\Rightarrow \widehat{APE}=\widehat{AIB}$

Vậy $\Delta APE\backsim\Delta ABI$ (g.g).

- Chứng minh $KH//PI$

Gọi $M$ là giao điểm của $AO$ và $EF$, dung đường kính $AS$
Ta có $BE//CS$ cùng vuông góc $AC$
$BS//CF$ cùng vuông góc $AB$
$\Rightarrow BHCS$ là hình bình hành nên $H,K,S$ thẳng hàng
Ta có $AE.AC=AH.AD$ và $AE.AC=AM.AS$

$\Rightarrow AH\cdot AD=AM\cdot AS\Rightarrow \dfrac{AH}{AS}=\dfrac{AM}{AD}\Rightarrow \Delta AHM\backsim\Delta ASD\Rightarrow \widehat{AHM}=\widehat{ASD}$

$\Rightarrow HMSD$ nội tiếp đường tròn

Kết hợp $PMID$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{PIM}=\widehat{PDM}=\widehat{HSM}\Rightarrow HS//PI$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Cho biểu thức $P=a^4+b^4-ab$ với $a,b$ là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+ab=3$.
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P$

**Lời giải**

$P=a^4+b^4-ab=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2-ab=(3-ab)^2-2a^2b^2-ab=9-6ab+a^2b^2-2a^2b^2-ab$

$=9-7ab-a^2b^2=-\left[(ab)^2+2\cdot ab\cdot\dfrac{7}{2}+\dfrac{49}{4}\right]+\dfrac{49}{4}+9=-\left(ab+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{85}{4}.$

Vì $a^2+b^2=3-ab$, mà $(a+b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\ge -2ab\Rightarrow 3-ab\ge -2ab\Leftrightarrow ab\ge -3$.

Và $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow 3-ab\ge 2ab\Leftrightarrow ab\le 1$.

Từ (1) và (2) suy ra $-3\le ab\le 1\Leftrightarrow -3+\dfrac{7}{2}\le ab+\dfrac{7}{2}\le\dfrac{7}{2}+1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le ab+\dfrac{7}{2}\le\dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \left(ab+\frac{7}{2}\right)^2 \le \frac{81}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} \le -\left(ab+\frac{7}{2}\right)^2 \le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4}+\frac{85}{4} \le -\left(ab+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{85}{4} \le -\frac{1}{4}+\frac{85}{4}$

$\Leftrightarrow 1 \le -\left(ab+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{85}{4} \le 21$

Vậy Max $P=21$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} ab=-3 \\ a^2+b^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=-\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-\sqrt{3} \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$.

Min$P=1$. Dấu $=$ xảy ra khi $\begin{cases} ab=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$.

------------------------------- HẾT -------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2020 - 2021**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+5}{x-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=4$

2. Chứng minh $B=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của $x$ để biểu thức $P=2A.B+\sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

1) Thay $x=4$ $(TMDK)$ vào biểu thức $A$ ta có: $A=\dfrac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{2+1}{2+2}=\dfrac{3}{4}$.

Vậy khi $x=4$ thì $A=\dfrac{3}{4}$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

Với $x\ge 0, x\ne 1$ ta có:

$$B=\frac{3}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+5}{x-1}=\frac{3}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}+3-\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}\ (dpcm)$$

Vậy với $x\ge 0, x\ne 1$ thì $B=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của $x$ để biểu thức $P=2A.B+\sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Với $x\ge 0, x\ne 1$ ta có:

$$P=2A.B+\sqrt{x}$$

$$P=2.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\sqrt{x}$$

$$P=\frac{4}{\sqrt{x}+2}+\sqrt{x}$$

$$P=\sqrt{x}+2+\frac{4}{\sqrt{x}+2}-2$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương $\sqrt{x}+2$ và $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}$ ta có:

$$\sqrt{x}+2+\frac{4}{\sqrt{x}+2}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right).\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=2\sqrt{4}=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+2+\frac{4}{\sqrt{x}+2}-2\ge 2$$

$$\Rightarrow A\ge 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+2=\frac{4}{\sqrt{x}+2}\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)^2=4\ \Leftrightarrow \sqrt{x}+2=2\ \left(\text{Do } \sqrt{x}+2\ge 2\ \forall x\ge 0,\ x\ne 1\right)$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\ \left(tm\right)$.

Vậy biểu thức $P$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2$ khi $x=0$.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1) Giải bài toán san bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Quãng đường từ nhà An đến nhà Bình dài 3 km. Buổi sáng, An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình. Buổi chiều cùng ngày, An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An trên cùng quãng đường đó với vận tốc lớn hơn vận tốc đi bộ của An là 9km/h. Tính vận tốc đi bộ của An, biết thời gian đi buổi chiều ít hơn thời gian đi buổi sáng là 45 phút. (Giả định rằng An đi bộ với vận tốc không đổi trên toàn bộ quãng đường đó).

2. Một quả bóng bàn có dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi\approx 3{,}14$).

**Lời giải**

1) Gọi vận tốc đi bộ của An là $x\ \left(km/h\right),\ \left(x>0\right)$.

$\Rightarrow$ Thời gian An đi bộ hết quãng đường từ nhà An đến nhà Bình là: $\frac{3}{x}\ \left(h\right)$.

Vận tốc đi xe đạp của An hơn vận tốc đi bộ là $9\ km/h$ nên vận tốc đi xe đạp là: $x+9\ \left(km/h\right)$.

$\Rightarrow$ Thời gian An đi xe đạp hết quãng đường từ nhà Bình về nhà An là: $\frac{3}{x+9}\ \left(h\right)$.

Vì An đi xe đạp nhanh hơn đi bộ là 45 phút $=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}\left(h\right)$ nên ta có phương trình:

$$\frac{3}{x}-\frac{3}{x+9}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x+9\right)-4x=x\left(x+9\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x+36-4x=x^2+9x$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x-36=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+12x-3x-36=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x+12\right)-3\left(x+12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x+12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \left(tm\right) \\ x=-12 & \left(ktm\right) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc đi bộ của An là $3km/h$.

2) Diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó là: $S = 4\pi R^2 \approx 4.3,14.2^2 \approx 50,24\left(cm^2\right)$.

Vậy diện tích bề mặt của quả bóng bàn là $S \approx 50,24\ cm^2$.

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \dfrac{3}{y-1} = 5 \\ 4x - \dfrac{1}{y-1} = 3 \end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét đường thẳng $(d): y = mx + 4$ với $m \neq 0$.

a) Gọi $A$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ và trục $Oy$. Tìm tọa độ của điểm $A$.

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt trục $Ox$ tại điểm $B$ sao cho tam giác $OAB$ là tam giác cân.

**Lời giải**

1. Điều kiện: $y \neq 1$.

Đặt $\dfrac{1}{y-1} = u\ (u \neq 0)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3u = 5 \\ 4x - u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6u = 10 \\ 4x - u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u = 7 \\ 4x - u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ 4x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1\ (tm) \\ x = 1 \end{cases}$$

Với $u = 1$ ta có: $\dfrac{1}{y-1} = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 2\ (tm)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;2)$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, xét đường thẳng $(d): y = mx + 4$ với $m \neq 0$.

a) Gọi $A$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ và trục $Oy$. Tìm tọa độ của điểm $A$.

Vì $A$ là giao điểm của của đường thẳng $(d)$ và trục $Oy$ nên hoành độ điểm $A$ là $x_A = 0$.

Gọi $A(0;y_A)$

Vì $A(0;y_A) \in d$ nên ta có: $y_A = m.0 + 4 \Leftrightarrow y_A = 4$.

Vậy $A(0;4)$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ và trục $Oy$.

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt trục $Ox$ tại điểm $B$ sao cho tam giác $OAB$ là tam giác cân.

Vì $B$ là giao điểm của $(d)$ cắt trục $Ox$ nên tung độ điểm $B$ là $y_B = 0$.

Gọi $B(x_B;0)$. Vì $B(x_B;0) \in (d)$ nên ta có: $0 = m.x_B + 4 \Leftrightarrow x_B = \dfrac{-4}{m}$ (vì $m \neq 0$)

Suy ra $B\left(\dfrac{-4}{m};0\right)$. Do đó $OB = \left|\dfrac{-4}{m}\right|$.

Theo câu a) ta có: $A(0;4)$ nên $OA = |4| = 4$.

Vì tam giác $OAB$ cân tại $O$ nên $OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{m}\right| = 4$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-4}{m} = 4 \\ \frac{4}{m} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m = -4 \\ 4m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1\ (tm) \\ m = 1\ \ (tm) \end{array}\right.$$

Vậy $m = -1; m = 1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài.

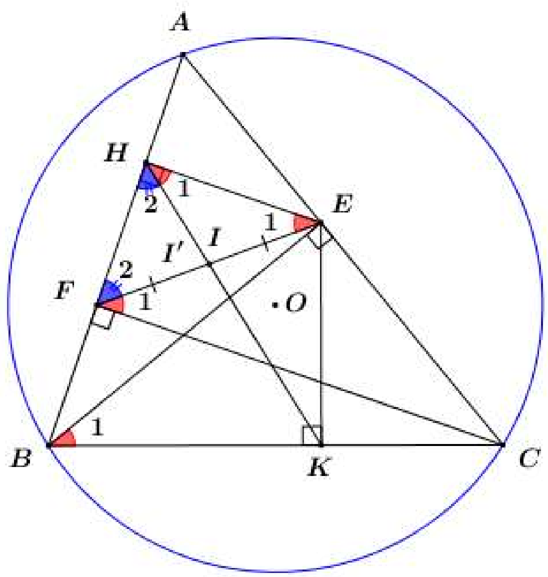
**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và đường cao BE. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm E đến các đường thẳng AB và BC.

1) Chứng minh tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $BH.BA = BK.BC$.

3) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng.

**Lời giải**




1) Chứng minh tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\angle BHE = 90^0$ (do $EH \perp AB$) ; $\angle BKE = 90^0$ (do $EK \perp BC$)

Tứ giác $BHEK$ có $\angle BHE + \angle BKE = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng $180^0$) (đpcm)

2) Chứng minh $BH.BA = BK.BC$.

Theo câu a) tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\angle BKH = \angle BEH$ (cùng chắn cung $BH$)

Ta có:

$\angle BEH + \angle EBH = 90^0$ (do tam giác $BHE$ vuông tại $H$).

$\angle BAE + \angle EBH = 90^0$ (do tam giác $ABE$ vuông tại $E$).

Nên $\angle BEH = \angle BAE$ (cùng phụ với $\angle EBH$).

Mà $\angle BKH = \angle BEH$ (cmt) nên $\angle BKH = \angle BAE$ $(= \angle BEH)$.

Xét $\Delta BHK$ và $\Delta BCA$ có:

$\angle ABC$ chung

$\angle BKH = \angle BAE = \angle BAC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta BCA\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BA}$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow BH.BA = BK.BC$ (đpcm).

3) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng.

**Cách 1:**

Nối $H$ và $K$.

Xét $\Delta BHK$ và $\Delta BCA$ ta có:

$\angle ABC$ *chung*

$\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BA}$ (do $BA.BA = BK.BC$)

$\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta BCA\ \ (c-g-c)$

$\Rightarrow \angle BHK = \angle BCA$ (hai góc tương ứng) (1)

Xét tứ giác $BFEC$ ta có:

$\angle BFC = \angle BEC = 90^0$

Mà $F, E$ là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb).

$\Rightarrow \angle BCE + \angle BFE = 180^0$ (tính chất tứ giác nội tiếp).

Mà $\angle AFE + \angle BFE = 180^0$ (2 góc kề bù)

$\Rightarrow \angle BCE = \angle AFE\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\angle BHK = \angle HFI.$

Ta có: $\Delta FHE$ vuông tại $H$ có $HI$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow HI = \dfrac{1}{2}EF$ (tính chất đường trung tuyến ừng với cạnh huyền).

$\Leftrightarrow HI = FI$

$\Rightarrow \Delta HIF$ cân tại $I$ (dhnb $\Delta$ cân)

$\Rightarrow \angle FHI = \angle HFI$ (tính chất $\Delta$ cân)

Mà $\angle HFI = \angle BHK$

$\Rightarrow \angle FHI = \angle BHK\ \ \Rightarrow HI \equiv HK$

$\Rightarrow H, I, K$ thẳng hàng.

**Cách 2:**

Gọi $I'$ là giao điểm của HK và EF.

Xét tứ giác $BFEC$ có: $\angle BFC = \angle BEC = 90^0\ (gt)$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn 1 cạnh các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \angle B_1 = \angle F_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $EC$).

Ta có: $EH // CF$ (cùng vuông góc $AB$)

$\Rightarrow \angle F_1 = \angle E_1$ (so le trong)

Do đó $\angle B_1 = \angle E_1$ (1).

Theo câu a, tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\angle B_1 = \angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $EK$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\angle H_1 = \angle E_1$

Tam giác $I'HE$ có $\angle H_1 = \angle E_1$ nên là tam giác cân (định nghĩa).

$\Rightarrow I'H = I'E$ (tính chất tam giác cân) (3)

Lại có: $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle BHE = 90^0$

$\angle F_2 + \angle E_1 = 90^0$ (do tam giác $HEF$ vuông tại $H$).

Nên $\angle H_2 = \angle F_2$ hay tam giác $I'HF$ cân tại $I'$ (định nghĩa).

$\Rightarrow I'H = I'F$ (tính chất tam giác cân) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $I'E = I'F$ hay $I'$ là trung điểm của $EF$.

Do đó $I' \equiv I$ nên ba điểm $H, I, K$ thẳng hàng (đpcm).

**Câu V. (0,5 điểm)** Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$

**Lời giải**

Điều kiện: $x \geq \dfrac{2}{3}$

Ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2\sqrt{3x-2} = 2x^2 + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{3x-2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4x - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{3x-2} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right) + \left(3x - 2 - 2\sqrt{3x-2} + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3x-2} - 1\right)^2 = 0$

Vì $(x-1)^2 \geq 0; \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$ và $\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq \dfrac{2}{3}$ nên

$2(x-1)^2 + \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3x-2} - 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{3x-2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ \sqrt{3x-2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{tm})$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2021 - 2022**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 13/6/2021
Thời gian làm bài: **90 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=16$.

2. Chứng minh $A+B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$.

**Lời giải**

1. Thay $x=16$ (TMĐKXĐ) vào biểu thức $A$ ta có: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}+3}=\dfrac{4}{7}$.

Vậy $A=\dfrac{4}{7}$ khi $x=16$.

2. $A+B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-3x-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$=\dfrac{3\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$

Vậy $A+B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0, x\ne 9$

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)

2. Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao $1{,}6$ m và bán kính đáy $0{,}5$ m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi\approx 3{,}14$ ).

**Lời giải**

1. Gọi số bộ đồ bảo hộ y tế mỗi ngày sản xuất được là $x$ (bộ, $x<4800, x\in\mathbb{N}^*$ )
Số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm theo kế hoạch là 4800 bộ

Thời gian phải làm theo kế hoạch là $\dfrac{4800}{x}$ ngày

Thực tế:

- Mỗi ngày tổ sản xuất được $x+100$ bộ

- Thời gian hoàn thành là $\frac{4800}{x+100}$ ngày

Tổ sản xuất hoàn thành trước thời hạn 8 ngày nên ta có phương trình: $\frac{4800}{x+100}+8=\frac{4800}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{8x+5600}{x+100}=\frac{4800}{x}$$
$$\Rightarrow 8x^2+800x-480000=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+100x-60000=0$$
$$\Leftrightarrow (x-200)(x+300)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-200=0 \\ x+300=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=200(TM) \\ x=-300(L) \end{array}\right.$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải sản xuất 200 bộ đồ bảo hộ y tế.

2. Diện tích bề mặt được sơn của thùng nước là: $S_{xq}=2\pi R.h\approx 2.3,14.0,5.1,6\approx 5,024\left(m^2\right)$

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{x+1}-2y=-1 \\ \frac{5}{x+1}+3y=11 \end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m-2$.

Tìm tất cả giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ sao cho $\left|x_1-x_2\right|=2$.

**Lời giải**

1. ĐK: $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

Ta có: $\begin{cases} \frac{3}{x+1}-2y=-1 \\ \frac{5}{x+1}+3y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{x+1}-6y=-3 \\ \frac{10}{x+1}+6y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{x+1}=19 \\ \frac{5}{x+1}+3y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1}=1 \\ 5.1+3y=11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ 3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện

KL: Nghiệm của hệ phương trình là $(0;2)$

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=2x+m-2 \Leftrightarrow x^2-2x-(m-2)=0$

Để $(d)$ cắt $(P)$ tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta=(b)^2-4ac>0 \Leftrightarrow 4+4(m-2)>0 \Leftrightarrow 1+m-2>0 \Leftrightarrow m-1>0 \Leftrightarrow m>1$

Theo định lý viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-(m-2) \end{cases}$

Ta có: $\left|x_1-x_2\right|=2$

Bình phương hai vế không âm ta có: $\left(x_1-x_2\right)^2=4 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=4$

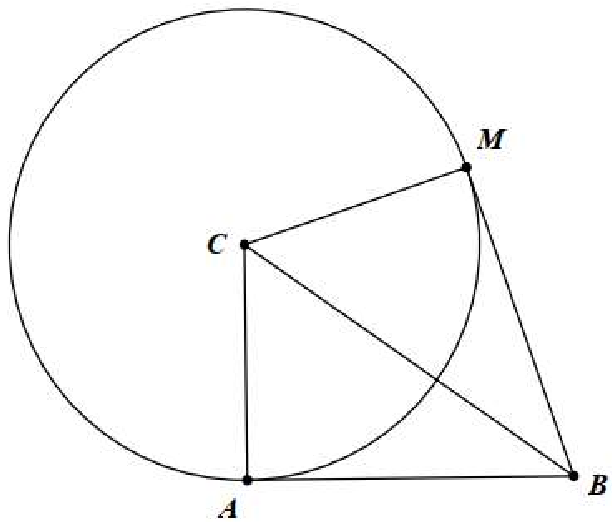
$\Leftrightarrow 4+4(m-2)=4 \Leftrightarrow 4(m-2)=0 \Leftrightarrow m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

Vậy $m=2$ thì $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Vẽ đường tròn tâm $C$, bán kính $CA$. Từ điểm $B$ kẻ tiếp tuyến $BM$ với đường tròn $(C;CA)$ ( $M$ là tiếp điểm, $M$ và $A$ nằm khác phía đối với đường thẳng $BC$ ).

1. Chứng minh bốn điểm $A, C, M$ và $B$ cùng thuộc một đường tròn.
2. Lấy điểm $N$ thuộc đoạn thẳng $AB$ ( $N$ khác $A, N$ khác $B$ ). Lấy điểm $P$ thuộc tia đối của tia $MB$ sao cho $MP=AN$. Chứng minh tam giác $CPN$ là tam giác cân và đường thẳng $AM$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $NP$.

**Lời giải**



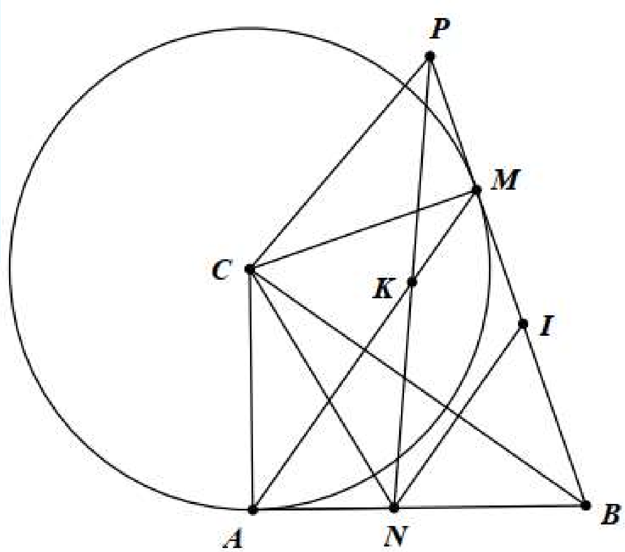

1. Ta có: $\widehat{BAC}=90^\circ$ (tam giác $ABC$ vuông tại $A$ ); $\widehat{BMC}=90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến)

Do đó: $\widehat{BAC}+\widehat{BMC}=180^\circ$

$\Rightarrow ABMC$ là tứ giác nội tiếp (Tổng số đo hai góc đối nhau bằng $180^\circ$ )

$\Rightarrow$ bốn điểm $A, C, M, B$ cùng thuộc đường tròn đường kính $BC$.

2.




+) Chứng minh tam giác $CPN$ là tam giác cân

Xét $\Delta CAN$ và $\Delta CMP$ có:

$AN = MP(GT)$;

$CA = CN$ (bán kính của $(C;CA)$ );

$\widehat{CAN} = \widehat{CMP} = 90^\circ$ (GT và tính chất của tiếp tuyến)

$\Rightarrow \Delta CAN = \Delta CMP$ ( c.g.c)

$\Rightarrow CN = CP$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta CPN$ cân tai $C$.

+) Chứng minh đường thẳng $AM$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $NP$.

Gọi $K$ là giao điểm của $AM$ và $PN$. Kẻ $NI // AM (I \in BM)$

$\Rightarrow \frac{BA}{AN} = \frac{BM}{MI}$ (định lý Ta-let) mà $BA = BM(\Delta BAC = \Delta BMC(ch - cgv))$

$\Rightarrow AN = MI$.

Lại có $AN = PM(GT) \Rightarrow MI = MP \Rightarrow M$ là trung điểm của $IP$.

Xét $\Delta PNI$ có $M$ là trung điểm của $IP$

$MK // IN(AM // NI) \Rightarrow K$ là trung điểm của $PN$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Với các số thực $a$ và $b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a+b) + ab$.

**Lời giải**

Ta có: $P = 3(a+b) + ab \Leftrightarrow ab = P - 3(a+b)$. Thay vào giả thiết, ta được:

$$a^2 + b^2 = 2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2\left[P - 3(a+b)\right] = 2$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + 6(a+b) = 2P + 2 \Leftrightarrow (a+b+3)^2 = 2P + 11$$

Ta có: $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a+b)^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le a + b \le 2$

$\Rightarrow -2 + 3 \le a + b + 3 \le 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \le (a+b+3)^2 \le 25 \Leftrightarrow 1 \le 2P + 11 \le 25 \Leftrightarrow -5 \le P \le 7$

Do đó, MinP $= -5 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -1$

-------------------------------- HẾT --------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
**NĂM HỌC 2022 - 2023**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 19/6/2023
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{x+4}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$.

2. Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

3. Tìm số nguyên dương $x$ lớn nhất thỏa mãn $A-B<\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

1. Thay $x=9$ (TMĐK) vào biểu thức $A$, ta có: $A=\dfrac{3\sqrt{9}}{\sqrt{9}+2}=\dfrac{9}{5}$.

Vậy với $x=9$ thì $A=\dfrac{9}{5}$

2. $B=\dfrac{x+4}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{x+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{x+4-2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

3. Ta có: $A-B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

$A-B<\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}<\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 4\sqrt{x}<3\sqrt{x}+6\left(\text{vì } x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}+2\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}<6$, dẫn tới $x<36$.

Kết hợp với điều kiện và yêu cầu của bài toán, suy ra $x=35$.

Vậy số nguyên dương $x$ lớn nhất thỏa mãn $A-B<\dfrac{3}{2}$ là $x=35$.

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm $A$ và đi đến địa điểm $B$. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là $20$ km/h nên ô tô đến $B$ sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường $AB$ dài $60$ km, tính vận tốc của mỗi xe. (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường $AB$.)

2. Quả bóng đá thường được sử dụng trong các trận thi đấu dành cho trẻ em từ 6 tuổi đến 8 tuổi có dạng một hình cầu với bán kính bằng $9{,}5$ cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đó (lấy $\pi\approx 3{,}14$).

**Lời giải**

1. Gọi vận tốc của xe máy khi di chuyển từ $A$ đến $B$ là $x\left(\text{ km/h}\right)$. Điều kiện $x>0$.

Vận tốc của ô tô là $x+20\left(\text{ km/h}\right)$.

Vì quãng đường $AB$ dài $60$ km nên:

+Thời gian xe máy đi từ $A$ đến $B$ là $\frac{60}{x}$ (giờ);

+Thời gian ô tô đi từ $A$ đến $B$ là $\frac{60}{x+20}$ (giờ).

Đổi 30 phút $=\frac{1}{2}$ (giờ).

Vì ô tô đến $B$ sớm hơn xe máy $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+20}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2+20x-2400=0.$

$\Delta'=10^2-1\cdot\left(-2400\right)=2500\Rightarrow\Delta'>0,\sqrt{\Delta'}=50.$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1=\frac{-10+50}{1}=40$ ; $x_2=\frac{-10-50}{1}=-60$.

Đối chiếu điều kiện ta được $x=40$.

Vậy vận tốc xe máy là $40$ km/h và vận tốc ô tô là $60$ km/h.

2. Diện tích bề mặt của bóng hình cầu là $S=4\pi R^2\approx 4.3,14.\left(9,5\right)^2$

Vậy $S\approx 1133,54\ \left(\text{cm}^2\right)$

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+\frac{12}{y+2}=5\\3x-\frac{4}{y+2}=2\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right):y=2x+m^2$.

a) Chứng minh $\left(d\right)$ luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả giá trị của $m$ để $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2$ thỏa mãn $\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=-3$.

**Lời giải**

1. ĐK: $y\neq -2$.

HPT $\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{12}{y+2}=5\\3x-\frac{4}{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{12}{y+2}=5\\9x-\frac{12}{y+2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11x=11\\2x+\frac{12}{y+2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\\frac{12}{y+2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Đối chiếu điều kiện, ta được hệ phương trình có nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d)$ và parabol $(P)$ :

$x^2 = 2x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 = 0 (1)$

Ta có: $\Delta' = 1 + m^2$. Suy ra $\Delta' > 0$ với mọi giá trị của $m$.
Do đó phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.
Vậy $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Vì $x_1, x_2$ là hoành độ giao điểm của của đường thẳng $(d)$ và parabol $(P)$ nên $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(1)$.

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1, x_2 = -m^2 \end{cases}$

Từ đó: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 + 4 = 0$

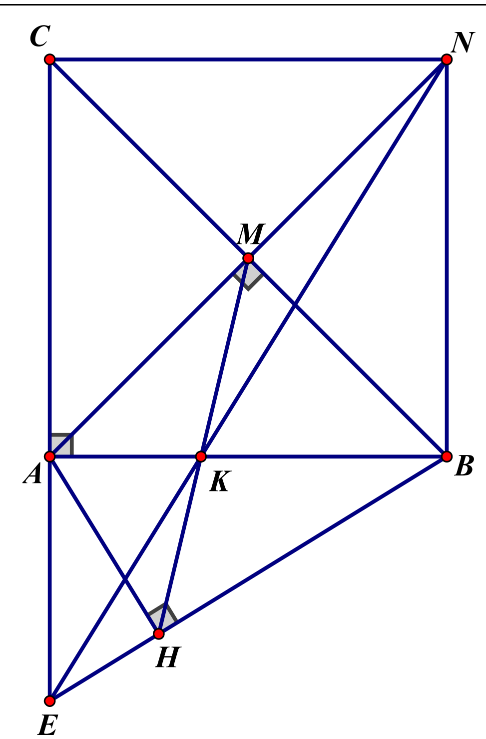
Suy ra $2 - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}$.

Vậy để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$ thì $m = \pm\sqrt{6}$.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại đỉnh $A$. Gọi $E$ là một điểm bất kỳ trên tia $CA$ sao cho điểm $A$ nằm giữa hai điểm $C$ và $E$. Gọi $M$ và $H$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm $A$ đến các đường thẳng $BC$ và $BE$.
1. Chứng minh tứ giác $AMBH$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $BC \cdot BM = BH.BE$ và $HM$ là tia phân giác của góc $AHB$.
3. Lấy điểm $N$ sao cho $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $AN$. Gọi $K$ là giao điểm của hai đường thẳng $EN$ và $AB$. Chứng minh ba điểm $H,K,M$ là ba điểm thẳng hàng.

**Lời giải**

1. Vì $AM \perp BC \Rightarrow \widehat{AMB} = 90°$.
Vì $AH \perp BE \Rightarrow \widehat{AHB} = 90°$
Xét tứ giác $AMBH$ có: $\widehat{AMB} + \widehat{AHB} = 90° + 90° = 180°$
Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AMBH$ là tứ giác nội tiếp
2. Xét tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AM$ nên $AB^2 = BM \cdot BC$ (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông).
Xét tam giác $ABE$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$ nên $AB^2 = BH \cdot BE$ (2) (hệ thức lượng trong tam giác vuông).
Từ (1), (2) $\Rightarrow BC \cdot BM = BH \cdot BE$.
Ta có: $\widehat{AHM} = \widehat{ABM}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $AM$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMBH$).
Ta có: $\widehat{BHM} = \widehat{BAM} (4)$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $BM$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMBH$).
Vì tam giác $AMB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{BHM}$ (5)



Vì tia $HM$ nằm giữa hai tia $HA,HB$ nên từ $(3),(4),(5)$ suy ra tia $HM$ là tia phân giác của $\widehat{AHB}$.

3. Vì tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $AM \perp BC$ nên $M$ là trung điểm $BC$. Tứ giác $ACNB$ có hai đường chéo $AN$ và $BC$ cắt nhau tại trung điểm $M$ của mỗi đường chéo nên tứ giác $ACNB$ là hình bình hành.

Hình bình hành $ACNB$ có hai đường chéo $AN$ và $BC$ vuông góc nhau nên tứ giác $ACNB$ là hình thoi. Do đó $NB = AB$ và $NB // AE$.

Áp dụng định lý Talet trong tam giác $AKE$ ta có: $\frac{KA}{KB} = \frac{AE}{BN} = \frac{AE}{AB}(6)$.

Mặt khác, $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{HB}\left(= \tan\widehat{ABE}\right)(7)$.

Từ (6), (7) suy ra: $\frac{KA}{KB} = \frac{AH}{HB}$, do đó tia $HK$ là tia phân giác của $\widehat{AHB}(8)$.

Mà tia $HM$ là tia phân giác của $\widehat{AHB}(9)$.

Từ (8),(9) suy ra ba điểm $H,K,M$ thẳng hàng.

**Câu V. (0,5 điểm).** Với các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

**Lời giải**

Vì $x, y \geq 0$ nên $P \geq 0$ và $P^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 = \left(x^2 + y^2\right) + \left(4xy + 3y^2\right) \geq 4$

Từ đó $P^2 \geq 4 \Leftrightarrow P \geq 2$.

Với $x = 2, y = 0$ (thỏa mãn điều kiện bài toán), ta có: $P = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng 2

------------------------------ HẾT ------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 11/6/2023
Thời gian làm bài: **120 phút**

---

**Câu I. (2,0 điểm)** Cho hai biểu thức $A=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}+\frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x>0, x\neq 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x=9$.

2. Chứng minh $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3. Tìm tất cả giá trị của $x$ để $A\cdot B=4$.

**Lời giải**

1) Thay $x=9$ (TMĐK) vào biểu thức $A$, ta có $A=\frac{9+2}{\sqrt{9}}=\frac{11}{3}$

2) $B=\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}+\frac{3-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}+\frac{3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\frac{2x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3) $AB=4\Rightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{x}+1}=4\Rightarrow 2x-4\sqrt{x}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Kết hợp với các điều kiện, ta được $x=4$.

**Câu II. (2,0 điểm)** 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Theo kế hoạch, một phân xưởng phải làm xong 900 sản phẩm trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày phân xưởng đã làm được nhiều hơn 15 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 3 ngày trước khi hết thời hạn, phân xưởng đã làm xong 900 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà phân xưởng làm được trong mỗi ngày là bằng nhau.)

2. Một khối gỗ dạng hình trụ có bán kính đáy là $30\text{ cm}$ và chiều cao là $120\text{ cm}$. Tính thể tích của khối gỗ đó (lấy $\pi\approx 3{,}14$).

**Lời giải**

1) Gọi số sản phẩm mà phân xưởng phải làm trong một ngày theo kế hoạch là $x$ (sản phẩm). Điều kiện $x>0$.

Thời gian dự kiến phân xường làm xong 900 sản phẩm là $\frac{900}{x}$ (ngày).

Thực tế mỗi ngày phân xưởng làm được $x+15$ (sản phẩm).

Thời gian thực tế phân xường làm xong 900 sản phẩm là $\frac{900}{x+15}$ (ngày).

Vì phân xường làm xong 900 sản phẩm sớm hơn 3 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình

$\frac{900}{x}-\frac{900}{x+15}=3$.

Với điều kiện $x>0$, phương trình tương đương với $x^2+15x-4500=0$.

$$\Delta=15^2-4\cdot1\cdot(-4500)=18225\Rightarrow\sqrt{\Delta}=135.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{-15-135}{2}=-75; x_2=\frac{-15+135}{2}=60$.

Đối chiếu với điều kiện ta được $x=60$.

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm 60 sản phẩm.

2) Thể tích của khối gỗ là: $V=\pi R^2h\approx3{,}14.30^2.120$

Vậy $V\approx339120\left(\text{cm}^3\right)$.

**Câu III. (2,5 điểm)** 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{2}{x-3}-3y=1\\ \frac{3}{x-3}+2y=8\end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+2)x-m$.

a) Chứng minh $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi $x_1$ và $x_2$ là hoành độ các giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2}$

**Lời giải**

1) Điều kiện: $x\neq3$.

$$\begin{cases}\frac{2}{x-3}-3y=1\\ \frac{3}{x-3}+2y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x-3}-9y=3\\ \frac{6}{x-3}+4y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x-3}+4y=16\\ 13y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x-3}=12\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\ y=1\end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện, ta được hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{7}{2};1\right)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d)$ và parabol $(P)$:

$$x^2=(m+2)x-m\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+m=0\ (*).$$

Ta có $\Delta=m^2+4$. Suy ra $\Delta>0$ với mọi giá trị của $m$.

Do đó phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Vì $x_1,x_2$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d)$ và parabol $(P)$ nên $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m+2\\ x_1\cdot x_2=m\end{cases}$.

Từ đó $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2}\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2}$.

Suy ra $\frac{m+2}{m}=\frac{1}{m}$ (Điều kiện $m\neq 0$).

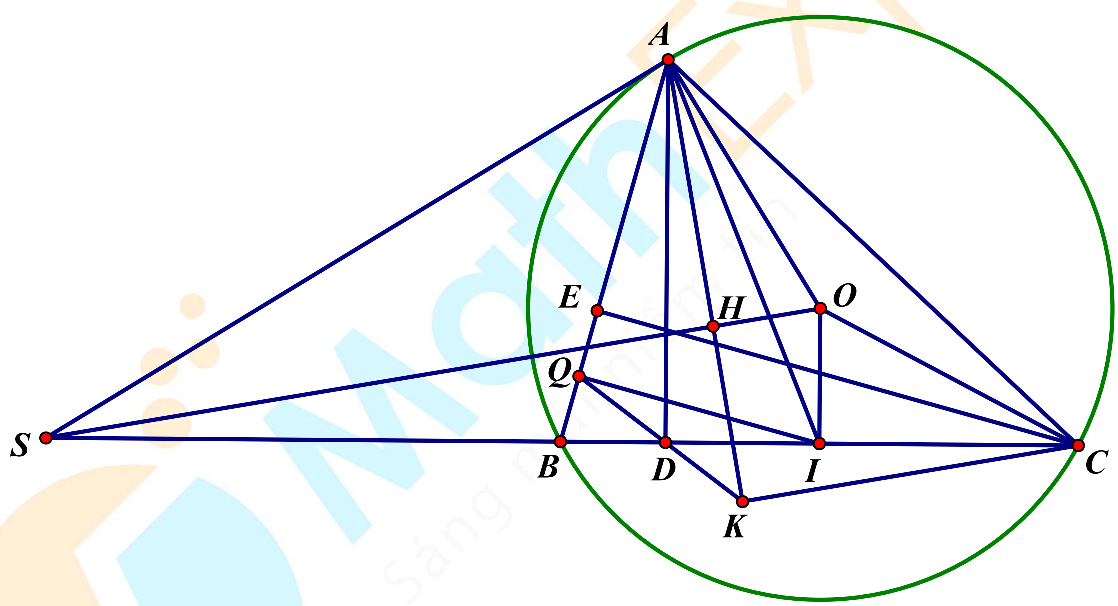
$\Rightarrow m+2=-1\Leftrightarrow m=-1$.

Đối chiếu với điều kiện, ta được $m=-1$.

**Câu IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn $(O)$. Tiếp tuyến tại điểm $A$ của đường tròn $(O)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $S$. Gọi $I$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $O$ đến đường thẳng $BC$.

1. Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi $H$ và $D$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm $A$ đến các đường thẳng $SO$ và $SC$. Chứng minh $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.
3. Vẽ đường cao $CE$ của tam giác $ABC$. Gọi $Q$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Đường thẳng $QD$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm $K$. Chứng minh $BQ.BA=BD.BI$ và đường thẳng $CK$ song song với đường thẳng $SO$.

**Lời giải**




1. Vì $SA$ là tiếp tuyến của $(O)$ nên $\widehat{SAO}=90^\circ$

Theo giả thiết ta có $OI\perp BC\Rightarrow\widehat{SIO}=90^\circ$

Xét tứ giác $SAOI$ có $\widehat{SAO}+\widehat{SIO}=180^\circ$, mà hai góc $\widehat{SAO}$ và $\widehat{SIO}$ là hai góc đối nhau nên tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có $\Delta OAH$ vuông tại $H$ nên $\widehat{OAH}=90^\circ-\widehat{HOA}$.

Ta có $\Delta IAD$ vuông tại $D$ nên $\widehat{IAD}=90^\circ-\widehat{DIA}$.

Vì $\widehat{HOA}=\widehat{DIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $SA$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $SAOI$ nên $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.

3) Ta có $Q,I$ lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BE,BC$

$\Rightarrow QI$ là đường trung bình của $\Delta BEC \Rightarrow QI // EC$.

Vì $EC \perp AB$ và $QI // EC$ nên $QI \perp AB$, do đó $\widehat{BQI} = 90°$.

Xét $\Delta BDA$ và $\Delta BQI$ cùng có chung $\widehat{ABC}$, mặt khác $\widehat{BDA} = \widehat{BQI} = 90^\circ$.

Suy ra $\Delta BDA \backsim \Delta BQI$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{BA}{BI} = \dfrac{BD}{BQ} \Rightarrow BQ.BA = BD.BI.$

Ta có $\widehat{AQI} = \widehat{ADI} = 90°$ nên tứ giác $AQDI$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{BAI}$. (1)

Xét $\Delta BAD$ vuông tại đỉnh $D$ có $\widehat{BAD} = 90° - \widehat{ABC} \cdot (2a)$

Xét $\Delta OAC$ có $OA = OC(=R)$. Suy ra $\Delta OAC$ cân tại đỉnh $O$.

Suy ra $\widehat{OAC} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}.(2b)$

Trong đường tròn $(O)$, ta có $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}\,(2c)$ (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $AC$).

Từ $(2a),(2b)$ và $(2c)$ suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Theo chứng minh ở ý 2, có $\widehat{IAD} = \widehat{OAH}$.

Suy ra $\widehat{BAD} + \widehat{IAD} = \widehat{OAC} + \widehat{OAH} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{KAC}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{KAC}$.

Xét tứ giác $ADKC$ có $\widehat{KDC} = \widehat{KAC}$, mà hai đỉnh $A, D$ kề nhau, suy ra tứ giác $ADKC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AKC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{AKC} = 90° \Rightarrow CK \perp AH$.

Ta có $SO \perp AH$ và $CK \perp AH$ nên $CK // SO$.

**Câu V. (0,5 điểm)** Cho hai số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $a + b \le 2$. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+b} + \dfrac{b^2}{b^2+a} \le 1$.

**Lời giải**

Do $a > 0, b > 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$a^2(b^2+a) + b^2(a^2+b) \le (b^2+a)(a^2+b)$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + a^3 + a^2b^2 + b^3 \le a^2b^2 + b^3 + a^3 + ab$

$\Leftrightarrow a^2b^2 \le ab \Leftrightarrow ab(ab-1) \le 0 \Leftrightarrow ab \le 1$ (vì $ab > 0$).

Do $a > 0, b > 0$ và $a + b \le 2$ nên $2\sqrt{ab} \le 2$. Suy ra $ab \le 1$ (đpcm).

-------------------------------- HẾT --------------------------------